LE RAPPORT GAISE (U.S.) CADRE D'UN CURRICULUM STATISTIQUE DE LA MATERNELLE À LA TERMINALE

Jeanne FINE[1]

TITLE

U.S. GAISE Report – A PreK-12 statistical curriculum framework

RÉSUMÉ

Cette contribution vise à faire connaître à nos lecteurs le rapport GAISE (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*) (Franklin *et al.*, 2007) : *cadre d'un curriculum statistique de la maternelle à la Terminale*, édité par l'Association des statisticiens américains (ASA) et disponible sur son site. Nous voulons montrer l'intérêt de prendre en compte ces propositions pour améliorer le curriculum statistique français.

Mots-clés : *rapport GAISE, curriculum statistique.*

ABSTRACT

This paper aims to introduce our readers to the GAISE report (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*) (Franklin *et al.*, 2007), a preK-12 statistical curriculum framework, edited by the American Statistical Association (ASA) and available on its website. We wish to demonstrate the interest of these proposals for improving the French statistical curriculum.

Keywords: *GAISE report, statistical curriculum.*

1 Introduction

Le rapport « GAISE (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*), a preK-12 statistical curriculum framework » (Franklin *et al.*, 2007)[2], est édité aux États-Unis par l'*American Statistical Association* (*ASA*) et disponible sur le site Internet de l'association.

Nous proposons en annexe 1 une traduction en français[2] de l'introduction et des grandes lignes du cadre conceptuel (20 pages). Sont détaillés dans la suite du rapport les différents éléments du cadre pour chacun des trois niveaux (90 pages).

Nous présentons succinctement, dans la section 2, le curriculum statistique proposé dans le rapport GAISE et, en annexe 2, les programmes français de statistique et probabilités.

Dans la section 3 nous comparons les deux curricula et avançons en conclusion quelques propositions pour repenser les programmes français de statistique et probabilités.

[1] Université de Toulouse, jeanne.fine@gmail.com

[2] Reproduit avec l'autorisation de l'ASA (American Statistical Association) que nous remercions ici.

2 Présentation succincte du curriculum proposé dans le rapport GAISE (U.S.)

Le rapport GAISE a son origine dans le NCTM's *Principles and Standards* (2000)[3] édité par le Conseil National des Professeurs de Mathématiques, et se veut un complément à ces recommandations, avec, pour objectif, de donner une image cohérente de l'ensemble du curriculum statistique pour le primaire et le secondaire.

Le rapport GAISE donne un cadre conceptuel d'une formation en statistique avec trois niveaux de développement. Ces trois niveaux, A, B et C, peuvent être pensés comme un programme pour le primaire (A), le collège (B) et le lycée (C). Ces niveaux reflètent en fait les étapes de l'apprentissage en statistique et pas seulement l'âge des élèves ; aussi, les lycéens ou étudiants qui n'ont pas eu de formation antérieure auront besoin de passer par les niveaux A et B avant d'aborder le niveau C.

Pour chaque niveau de développement, les élèves rencontreront les quatre étapes de la *démarche statistique* (appelées aussi dans le rapport les quatre composantes du processus de recherche pour la résolution d'un problème statistique) :

- formuler une question ;
- collecter des données ;
- analyser les données ;
- interpréter les résultats.

Une attention particulière est portée à chaque niveau sur l'interprétation des résultats en revenant au *contexte de la question* posée au départ.

L'omniprésence de la variabilité dans les données est un des thèmes repris dans les trois niveaux ; les élèves sont amenés à repérer les sources de variabilité dans leurs données.

Différents types de variabilité sont introduits sur des exemples et repris en détails tout le long du cursus :

- la *variabilité des données de mesures* (plusieurs mesures d'une même grandeur) ;
- la *variabilité naturelle* d'une grandeur mesurée sur différentes unités statistiques d'une population ;
- la *variabilité induite* par différents niveaux de facteurs (dans le cadre, par exemple, de plans d'expériences) ;
- la *variabilité due au « hasard » dans le cadre d'échantillonnages aléatoires* ;
- la *variabilité due au « hasard » lors d'une assignation aléatoire des unités expérimentales à des groupes dans le cadre de plans d'expériences*.

Il y est question aussi :

- de *variabilité intragroupe* et de *variabilité intergroupe* ;
- de *co-variabilit*é ;
- de *variabilité résiduelle* dans le cadre de l'ajustement d'un modèle.

Sont nommées « *données d'observation* » les données qui ne sont pas issues d'une sélection aléatoire d'un échantillon d'unités statistiques ou de l'assignation aléatoire de

[3] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) *Principles and standards (2000)* http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909

traitements à des unités expérimentales ; le traitement de ces données diffère de celui de données obtenues selon des procédures aléatoires.

Le rapport insiste sur le fait qu'une formation à la statistique devrait présenter ces différents types de variabilité car, dans la pratique de la statistique, la résolution d'une question statistique et la prise de décision dépendent de la compréhension, de l'explicitation et de la quantification de la variabilité dans les données.

Le cadre conceptuel présenté en annexe ne détaille pas les concepts et méthodes permettant d'analyser les données recueillies. C'est dans les pages suivantes du rapport que nous trouvons ceux préconisés à chaque niveau de la formation en statistique. Nous les résumons ici.

Au niveau A, sont présentés, sur de nombreux exemples, les *tableaux d'effectifs* et les *diagrammes en barres* pour une variable catégorielle, le *diagramme en points* (dotplot) et le *diagramme tige et feuilles* (stem and leaf plot) pour une variable numérique (éventuellement pour deux groupes), le *diagramme de dispersion* (scatterplot) pour un couple de variables numériques (appelé aussi graphe plan ou graphe X-Y d'un nuage de points), un *graphe chronologique* (timeplot) pour une variable numérique dépendant du temps, des *tableaux d'effectifs à double entrée*, les indices de centralité (*moyenne, médiane, mode*) et de dispersion (*étendue*) pour une variable numérique, la *modalité modale* pour une variable catégorielle. Il s'agit bien d'un premier niveau, sans doute bien ambitieux pour le primaire !

En ce qui concerne les probabilités au niveau A, il est indiqué que les élèves doivent comprendre que *la probabilité est une mesure des chances que quelque chose se réalise. C'est une mesure du certain ou de l'incertain.* Les évènements pourraient être placés sur un segment gradué de 0 (événement jugé impossible) à 1 (événement jugé certain) ; pour 1/2, il est jugé également probable que l'événement se réalise ou non ; de part et d'autre de 1/2 sont situés les événements dont la réalisation est jugée moins probable (avant 1/2) ou plus probable (après 1/2) que leur non réalisation.

Les élèves doivent réaliser des expériences pour estimer des probabilités à partir de fréquences calculées sur des données empiriques ; les lancers de pièces ou de dés, ou de roues de loterie, sont les outils utilisés à ce niveau.

Au niveau B, sont présentés, pour les variables numériques, les *distributions d'effectifs* et de *fréquences*, les *histogrammes*, les *quartiles*, *l'écart interquartile* et *l'écart absolu moyen*, le *diagramme en boîte* (boxplot) à partir des cinq indices *min.*, *premier quartile, médiane, troisième quartile, max*.

Des indices sont proposés pour mesurer l'association entre deux variables catégorielles ayant chacune deux modalités. Ces indices sont calculés en fonction des quatre effectifs de la table de contingence.

Ils sont réutilisés pour mesurer l'association entre deux variables numériques : la table de contingence 2 x 2 est construite en répartissant les observations au-dessous et au-dessus de la moyenne de chacune des deux variables. Si on note a, b, c, d ces effectifs et n l'effectif total, alors l'indice $[(a+d) - (b+c)] / n$ fournit une première indication sur l'association entre les deux variables.

Moins naturel est l'indice $Phi = (ad-bc)/(l_1 l_2 c_1 c_2)^{1/2}$ où l_1, l_2, c_1, c_2 désignent la somme des effectifs des lignes 1 et 2 et des colonnes 1 et 2. Il s'agit d'un indice descriptif (c'est-à-dire ne dépendant pas de l'effectif total n) ; il mesure un écart entre le tableau de fréquences observées et le tableau d'indépendance entre les deux variables. On a la relation $Phi^2=Khi^2/n$ où Khi^2 est la statistique du test d'indépendance des deux variables. On peut vérifier que, si l'on remplace les variables catégorielles par l'indicatrice de la première modalité, alors le coefficient de corrélation linéaire des deux indicatrices est égal à *Phi*.

A partir du graphe plan d'un nuage de points représentant les observations de deux variables numériques, est abordée la modélisation par ajustement linéaire, dans ses aspects descriptif et prédictif. C'est tout d'abord à l'œil qu'il est proposé de tracer une droite passant « au mieux » par le nuage de points, puis en utilisant les centres de gravité des deux sous-nuages définis à partir de la médiane de la variable explicative (droite de Mayer).

C'est au niveau B que la fluctuation d'échantillonnage d'une moyenne d'échantillonnage ou d'une fréquence d'échantillonnage est étudiée, par simulation.

Au niveau C, sont introduites les notions de variance, écart-type, coefficient de corrélation linéaire et droite d'ajustement par les moindres carrés.

L'étude des résultats d'un plan d'expériences est réalisée à partir de résumés numériques et de graphiques.

La marge d'erreur, à un niveau de confiance donné, associée à l'estimation d'une moyenne (ou d'une proportion) à partir d'un échantillon aléatoire, est étudiée par simulation. Le test d'hypothèse d'égalité d'une moyenne (ou d'une proportion) à une valeur fixée est abordé ainsi que la notion de p-valeur. La p-valeur est définie comme la probabilité d'observer un résultat comparable ou plus extrême que celui observé quand la valeur de cette moyenne (ou de cette proportion) dans la population est égale à la valeur fixée et elle est approchée par simulation.

En probabilités, les notions *d'espérance mathématique, variance, écart-type d'une variable aléatoire numérique* sont directement obtenues à partir des notions analogues de la statistique descriptive. L'accent est mis sur *l'indépendance en probabilité* et sur l'utilisation des probabilités pour prendre des décisions et tirer des conclusions.

Outre les notions et outils rappelés ci-dessus, les auteurs du rapport insistent sur l'importance de différencier les différentes sources de données :

- données obtenues à partir d'un sondage aléatoire ;
- données obtenues à partir d'un plan d'expériences aléatoires ;
- données d'observation (celles qui ne viennent pas d'un plan de recueil aléatoire, sondage ou plan d'expériences).

Ils ajoutent que la plupart des questions auxquelles il est possible de répondre à partir d'un recueil, de l'analyse et de l'interprétation des données exigent un plan de recueil aléatoire : sondage aléatoire ou plan d'expériences aléatoire. Ces deux plans de collecte ont des objectifs différents mais tous deux permettent de réduire les biais et d'utiliser l'inférence statistique pour l'estimation de la marge d'erreur et pour l'évaluation de la p-valeur d'un test d'hypothèse. Les données d'observation (et études observationnelles) peuvent néanmoins fournir des indications sur les distributions des variables d'intérêt et sur les associations qui peuvent exister entre elles, mais une relation de cause à effet ne peut pas être établie. C'est parfois la seule source disponible de données. Des exemples commentés illustrent cette partie du rapport.

3 Les programmes français au regard des principes de GAISE

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe 2 pour une description succincte des programmes de statistique et probabilités français du collège et de la série scientifique du lycée d'enseignement général. Le choix de concentrer notre analyse sur cette série est motivé par le fait que c'est celle dans laquelle s'engagent les futurs professeurs de mathématiques chargés d'enseigner statistique et probabilités dans le secondaire. Dans cette section nous comparons les deux approches, le curriculum proposé dans le rapport GAISE et les programmes français. Bien sûr, un cadre de références n'est pas un programme. Nous n'avons pas étudié la traduction en programmes scolaires des recommandations du NTCM et de GAISE dans les différents États des U.S.. De plus, quel que soit le pays, les programmes prescrits peuvent être bien éloignés de leur enseignement dans les classes. Nous comparons donc les idées directrices du rapport GAISE avec celles qui paraissent avoir motivé les concepteurs des programmes français.

En statistique et probabilités, le curriculum français est assez limité au niveau du collège et, au contraire, très détaillé au niveau du lycée mais sur un nombre restreint de notions. De plus ces notions sont déconnectées entre elles et l'aspect calculatoire l'emporte sur le sens et l'interprétation.

En effet, c'est en troisième qu'il est fait, pour la première fois, référence à la statistique et qu'une initiation aux probabilités est proposée. Avant ce niveau d'enseignement, il est question de traitement de données sans se préoccuper de l'origine ou du recueil des données ; il est proposé de travailler la mise en forme de tableaux et de graphiques sans en préciser le contenu : s'agit-il d'effectifs ? de données brutes ? de données agrégées ? On introduit le vocabulaire de la statistique, effectifs, fréquences, catégories, … sans définir ces notions. Aussi, dans les manuels scolaires ou les épreuves d'évaluation, l'utilisation du vocabulaire est parfois faite à contresens et les questions sont souvent mal posées. Les exigences en collège sont très faibles, surtout en regard des objectifs affichés dans l'introduction aux programmes.

Au lycée, dans la série scientifique, l'enseignement des probabilités est assez déconnecté de l'enseignement de la statistique : l'indépendance de deux événements et les exercices s'y référant sont déconnectés de la notion d'échantillon (un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience). La notion de probabilité conditionnelle est déconnectée de la notion de fréquence conditionnelle, puisque le traitement statistique d'un couple de variables catégorielles n'est pas au programme.

Par manque de temps, l'initiation à la statistique inférentielle est centrée sur l'estimation et le test pour une « proportion ». On notera que l'on utilise implicitement le vocabulaire des sondages : « proportion » par rapport à une population de référence plutôt que « probabilité » d'une loi de Bernoulli prise comme modèle d'une expérience aléatoire. Il est vrai que se restreindre à la proportion permet d'introduire la loi binomiale et de mieux justifier, dans ce cas particulier, les théorèmes limites (loi des grands nombres et théorème central limite).

L'exigence d'un programme linéaire et cumulatif, reposant sur des définitions mathématiques et admettant le moins possible de résultats non démontrés, aboutit à travailler des notions inutiles pour une formation à la statistique (prenons, par exemple, en première, la définition de l'intervalle de fluctuation de la fréquence d'échantillonnage, à un niveau de confiance fixé, à partir d'une distribution binomiale), voire même nuisibles (loi géométrique tronquée et son espérance mathématique alors que tout ce qui est tronqué est codé 0).

L’image de la statistique en fin de curriculum est surtout bien étroite : pas de vue d’ensemble des différents types de données et des différents objectifs de la statistique (en particulier la comparaison de deux groupes ou l’association entre deux variables), pas de formation à la démarche scientifique (formuler la question, recueillir des données, analyser les données, interpréter les résultats).

À l’opposé, le curriculum proposé dans le rapport GAISE est rédigé sans pratiquement aucun formalisme. Le contexte, le recueil et l’interprétation des données ainsi que le repérage du type de variabilité forment le cadre du curriculum. C’est une vision synthétique de la statistique qui est ainsi proposée. Il s’agit ensuite d’approfondir tel ou tel aspect et de revenir en boucle sur les apprentissages.

Le curriculum proposé répond à trois objectifs de niveau d’exigence croissant :

- une initiation aux concepts, idées, terminologie et techniques de base de la statistique ;
- une formation du futur citoyen à la littératie statistique (comprendre l’information quantitative, en avoir une lecture critique, savoir argumenter et communiquer à partir de données) ;
- une initiation à la démarche scientifique.

Pour les auteurs du rapport, la statistique est la discipline méthodologique de la recherche scientifique ; c’est la raison pour laquelle le curriculum proposé reprend, à chacun des trois niveaux (A, B, C) de développement de l’apprentissage de la statistique, les quatre étapes de la démarche scientifique. Il est indiqué dans le rapport que les trois niveaux de développement peuvent ne pas correspondre au primaire, collège et lycée. C’est sur ce point que nous nous proposons de revenir en conclusion.

4 Conclusion

L’objectif de cette contribution était de faire connaître à notre public le curriculum statistique proposé par les auteurs du rapport GAISE avec l’espoir qu’il puisse être pris comme référence pour améliorer le contenu des programmes de statistique et probabilités en France.

Les auteurs du rapport annoncent en introduction que les trois niveaux de développement peuvent ne pas correspondre au primaire, collège et lycée et que le but essentiel est la « littératie statistique ». Or, la littératie est souvent définie comme l’ensemble des connaissances et des compétences que l’ensemble des élèves doivent connaître à la fin de l’école obligatoire pour leur vie personnelle, professionnelle et de citoyen. C’est donc ce qui correspondrait, en France, au socle commun des connaissances et des compétences de la fin du collège.

Bien que faisant peu appel à une écriture formalisée, il paraît ambitieux de traiter les trois niveaux au collège. Le contenu semble en fait bien adapté à une formation continue d’adultes, non scientifiques et rétifs à toute formalisation. Mais il est dommage de ne pas profiter de l’enseignement de la statistique pour mieux former les élèves à un minimum de formalisation mathématique.

Peut-être même que les auteurs nous y invitent. Ils écrivent en effet en introduction : (…) la formation statistique devient de plus en plus mathématique au fur et à mesure que le niveau de compréhension s'élève. Mais on doit insister sur les plans de recueils de données, sur l'exploration des données et sur l'interprétation des résultats dans la formation statistique pour la littératie statistique. Ces éléments sont fortement dépendants du contexte et, à un niveau introductif, incluent peu de mathématiques formelles.

Le programme proposé est bien une initiation à la statistique. Les élèves désirant poursuivre des études universitaires et utiliser des méthodes statistiques de plus en plus répandues (analyses géométriques de données multidimensionnelles, classifications, réseaux bayésiens, …) auront besoin d'une meilleure formation en mathématiques : en particulier, logique et ensembles, relations, applications, espaces vectoriels et calcul matriciel. Il s'agit finalement de réintroduire des mathématiques « modernes » revisitées.

Il serait intéressant de mener avec les professeurs de français un travail interdisciplinaire maths-français sur le « non », « et », « ou » de la logique mathématique et l'utilisation de ces mots dans le langage courant. Les opérations sur les ensembles, la notion de partition, de distribution d'effectifs et de fréquences, les propriétés de la proportion (ou fréquence) sont un préalable important pour aborder les probabilités. C'est dès le collège, à partir de l'analyse statistique de données catégorielles, que ces outils peuvent être mis en place. Au lycée, une introduction élémentaire aux espaces vectoriels euclidiens et au calcul matriciel peut s'appuyer sur l'analyse statistique multidimensionnelle.

A condition de modifier l'enseignement des mathématiques en France (davantage de mathématiques appliquées, de modélisation, de travail interdisciplinaire, …) et d'accompagner simultanément de telles modifications par une évolution adaptée dans la formation, initiale et continue, des enseignants, il serait possible de mieux former l'ensemble des élèves de collège et de lycée mais aussi d'augmenter le nombre d'étudiants désirant poursuivre dans des disciplines scientifiques (en y incluant les mathématiques) et capables d'entreprendre de telles études.

Références

[1] EDUSCOL : http://eduscol.education.fr/
Site dépendant du ministère de l'éducation nationale sur lequel sont accessibles les programmes officiels, de tous les niveaux et toutes les disciplines, mais aussi les documents d'accompagnement aux programmes et ressources pédagogiques.

[2] Programme de mathématiques du collège :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

[3] Programme de mathématiques de seconde du lycée d'enseignement général et technologique :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

[4] Programme de mathématiques de première scientifique de lycée d'enseignement général :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf

[5] Programme de mathématiques de terminale scientifique de lycée d'enseignement général :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

Annexe 1 – Rapport GAISE
Cadre d'un curriculum statistique de la maternelle à la Terminale

Traduction de l'introduction et de la présentation du cadre conceptuel du rapport GAISE[4] (American Statistical Association Ed.[5]), par Jeanne Fine[6]

Introduction

1 Le but essentiel : la littératie statistique

Chaque matin, les journaux et autres médias nous fournissent une information statistique sur des sujets allant de l'économie à l'éducation, du cinéma aux sports, de la nourriture à la médecine, et de l'opinion publique au bien-être social. Une telle information guide nos décisions dans notre vie personnelle et nous rend capables de prendre nos responsabilités en tant que citoyens. Au travail, nous pouvons être en présence d'informations quantitatives sur les budgets, les dépenses, les spécifications de produits manufacturés, les études de marché, les prévisions de ventes ou les charges de travail. Les professeurs peuvent être confrontés à des statistiques de l'éducation concernant les performances des élèves ou leur propre responsabilité. Les médecins doivent comprendre les résultats statistiques des expériences utilisées pour tester l'efficacité et l'innocuité des médicaments. Les juges appliquent la loi en fonction des statistiques sur la criminalité. Si nous envisageons de changer d'emploi et de région, notre décision peut être affectée par des statistiques sur le coût de la vie, le taux de criminalité et la qualité de l'éducation.

Nos vies sont gouvernées par les nombres. Tous les bacheliers devraient être capables d'utiliser de façon appropriée le raisonnement statistique pour faire face intelligemment aux questions de citoyenneté, de l'emploi, de la famille et pour être préparés à une vie en bonne santé, heureuse et productive.

2 Citoyenneté

Les sondages d'opinion sont les exemples les plus visibles de l'impact sur nos vies de la statistique. En plus d'informer directement les citoyens, les sondages sont utilisés par d'autres acteurs dans le but d'avoir une influence sur nous. Le processus politique utilise les sondages d'opinion de différentes manières. Des candidats à un mandat électoral utilisent les sondages pour les guider dans leur stratégie de campagne. Un sondage peut déterminer les forces d'un candidat auprès des électeurs qui peuvent, en retour, être mises en avant dans la campagne. Les citoyens peuvent aussi être suspicieux sur le fait que les résultats de sondages puissent influencer les candidats à prendre des positions pour l'unique raison qu'elles sont populaires.

Un citoyen informé par des sondages a besoin de comprendre que les résultats sont obtenus à partir d'un échantillon de la population étudiée, que la fiabilité des résultats dépend

[4] Franklin *et al.* (2007), Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report, a pre-K-12 curriculum framework, American Statistical Association (ASA), Alexandria, VA 22314. Accessible en ligne : http://www.amstat.org/education/gaise/

[5] Reproduit avec l'autorisation de l'ASA (American Statistical Association) que nous remercions ici. Copyright 2007 par l'ASA. Tous droits réservés.

[6] Université de Toulouse, jeanne.fine@gmail.com

de la façon avec laquelle l'échantillon a été sélectionné, et que les résultats sont affectés d'une erreur d'échantillonnage. Le citoyen formé à la statistique devrait comprendre le comportement des échantillons « aléatoires » et être capable d'interpréter une « marge d'erreur d'échantillonnage ».

Le gouvernement fédéral a produit des statistiques depuis son origine. Les recensements U.S. ont été mis en place en 1790 pour fournir un dénombrement officiel de la population dans le but de proposer l'attribution de représentants au Congrès. Non seulement, le rôle du Bureau de Recensement U.S. s'est beaucoup développé jusqu'à inclure la collecte d'un large spectre de données socioéconomiques, mais d'autres départements fédéraux ont aussi produit de façon extensive des statistiques « officielles » concernant l'agriculture, la santé, l'éducation, l'environnement et le commerce. Les informations récoltées par ces agences influencent les choix politiques et aident à déterminer les priorités pour les dépenses du gouvernement. Elles sont aussi disponibles pour une utilisation par des individus ou des groupes privés. Ainsi, les statistiques compilées par les agences gouvernementales ont un impact immense sur la vie des citoyens ordinaires.

3 Choix personnels

La littératie statistique est requise pour des choix personnels de tous les jours. Les statistiques fournissent des informations sur la qualité nutritionnelle des aliments et donc agissent sur nos choix dans les magasins alimentaires. Les statistiques aident à établir la sécurité et l'efficacité des médicaments, ce qui aide les médecins à prescrire un traitement. Les statistiques aident aussi à établir la sûreté des jouets pour garantir l'absence de risque pour nos enfants. Nos choix d'investissement sont guidés par pléthore d'informations statistiques sur les actions et les obligations. Les mesures d'audience de Nielsen aident à déterminer quelles émissions vont être maintenues à la télévision, et ainsi affecter ce qui est proposé. De nombreux produits ont une histoire statistique et nos choix de produits peuvent être affectés par le fait de connaître cette histoire. Le design d'une automobile est réalisé à l'aide de mesures anthropométriques – les statistiques du corps humain – afin d'assurer le confort du passager. Les statistiques de consommation d'essence, de sécurité et de fiabilité sont disponibles pour nous aider à choisir un véhicule.

4 L'emploi et les professions

Les personnes qui sont formées à utiliser le raisonnement statistique dans leur carrière auront l'opportunité d'avancer à des positions mieux rémunérées et plus prestigieuses. Une force de travail ayant des compétences en statistique permettra aux U.S. d'être plus compétitifs dans le marché global et d'améliorer sa position dans l'économie internationale. Un investissement en littératie statistique est un investissement pour l'avenir économique de notre nation, aussi bien que pour le bien-être des individus.

Le marché concurrentiel exige la qualité. Les efforts pour améliorer la qualité et la responsabilité sont déterminants parmi les nombreux moyens que le raisonnement et les outils statistiques proposent pour améliorer la productivité.

Les pratiques de contrôle de qualité, telles que les monitorings statistiques utilisés dans les processus de conception et de fabrication de produits manufacturés, identifient les points sur lesquels une amélioration peut être apportée afin d'améliorer la qualité du produit. Les systèmes de responsabilité peuvent aider à produire des employés et des organisations plus efficaces, mais beaucoup de systèmes de responsabilité actuellement en place ne reposent pas sur des principes statistiques et peuvent, en fait, avoir l'effet opposé. De bons systèmes de responsabilité exigent une utilisation correcte des outils statistiques afin de déterminer et d'appliquer des critères appropriés.

5 Science

L'espérance de vie aux U.S. a presque doublé durant le 20e siècle ; cet accroissement rapide de l'espérance de vie est la conséquence de la science. La science nous a rendus capables d'améliorer les soins et les procédures médicales, la production alimentaire, la détection et la prévention des épidémies. Les statistiques jouent un rôle déterminant dans le progrès scientifique. L'administration « nourriture et médicaments » des U.S. exige d'effectuer de nombreux tests sur les médicaments afin de déterminer leur efficacité et leurs effets indésirables avant d'être mis sur le marché. Une publicité récente pour un médicament conçu pour réduire les caillots sanguins annonçait « PLAVIX, ajouté à l'aspirine et à vos médicaments actuels, aide à augmenter votre protection contre la crise cardiaque ». Mais la publicité annonçait aussi « le risque de saignement peut augmenter avec PLAVIX… ».

La littératie statistique conduit à une bonne dose de scepticisme au sujet des découvertes « scientifiques ». Est-ce que l'information à propos des effets indésirables du traitement PLAVIX est fiable ? Une personne formée à la statistique devrait se poser de telles questions et être capable d'y répondre intelligemment. Un bachelier formé à la statistique sera capable de comprendre les conclusions de recherches scientifiques et d'avoir une opinion argumentée sur la légitimité des résultats annoncés. En accord avec « Mathématiques et Démocratie : le cas de la littératie quantitative » (Steen, 2001), un tel savoir « responsabilise les gens en leur donnant des outils pour penser par eux-mêmes, pour poser des questions intelligentes aux experts et pour affronter l'autorité avec assurance. Ce sont des compétences nécessaires pour réussir dans le monde moderne. »

La littératie statistique est essentielle dans nos vies personnelles de consommateur, de citoyen et de professionnel. La statistique joue un rôle dans notre santé et notre bien-être. Acquérir de solides compétences dans le raisonnement statistique prend du temps. Elles ne peuvent pas être acquises au niveau nécessaire dans le monde moderne sans une formation dans le secondaire. La plus sûre manière d'aider les élèves à atteindre les compétences nécessaires est de commencer la formation en statistique à l'école primaire et de continuer à renforcer et développer les compétences statistiques des élèves durant les années de secondaire. Un bachelier formé à la statistique saura comment interpréter les données publiées dans le journal du jour et se posera les bonnes questions à propos de controverses statistiques. Il ou elle saura prendre des décisions quantitatives qui se présenteront dans son travail et des décisions éclairées à propos de choix de qualité de vie.

Le reste de ce document repose sur *un cadre conceptuel* d'un curriculum statistique pour une formation en primaire et secondaire conçu pour aider les élèves à acquérir les compétences relevant de la littératie statistique.

6 Le cas de la formation en statistique

Durant le dernier quart de siècle, la statistique (souvent appelée analyse des données et probabilités) est devenue une composante clé du curriculum mathématique pré-universitaire. Les avancées technologiques et les méthodes modernes d'analyse des données dans les années

1980, couplées avec la richesse des données de la société à l’âge de l’information, conduisent à développer un matériel curriculaire adapté pour introduire les concepts statistiques dans le curriculum scolaire dès le primaire. Cet effort, parti de la base, a été reconnu par le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) quand leur document influent, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989) a inclus « Analyse des données et Probabilité » comme l'un des cinq domaines de formation. Comme ce document, et celui qui l'a remplacé en 2000, *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), sont devenus la base pour réformer les curricula de mathématiques dans beaucoup d'États, l'acceptation de et l'intérêt pour la statistique comme partie de la formation mathématique se sont renforcés. Ces dernières années, de nombreux enseignants de mathématiques et des statisticiens ont consacré de grandes périodes de leur carrière pour améliorer les matériels d'enseignement de la statistique et les techniques pédagogiques.

NCTM n'est pas le seul groupe à demander l'amélioration de l'enseignement de la statistique en commençant au niveau scolaire. Le National Assessment of Educational Progress (NAEP, 2005) a été développé autour des mêmes domaines que les NCTM S*tandards*, les questions de probabilité et d'analyse des données jouant un rôle de plus en plus important dans l'examen du NAEP. En 2006, le Conseil de Collège a publié ses *College Board Standards for College Success: Mathematics and Statistics*, dans lequel il inclut « Données et Variation » et « Chance, Équité et Risque » parmi les huit thèmes qui sont « fondamentaux pour la connaissance et les compétences développées durant les années de secondaire ». Un examen des références recommandées par ce document révèle une insistance répétée pour l'analyse des données, les probabilités et la statistique à chaque niveau d'enseignement.

Le mouvement émergeant de la littératie quantitative demande un plus grand développement de compétences concrètes quantitatives qui permettront d'assurer le succès des bacheliers dans leur vie personnelle et dans leur vie active ; plusieurs de ces compétences sont statistiques par nature. Pour citer un extrait de *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy* (Steen, 2001) :

> La littératie quantitative, appelée aussi numératie, est l'outil naturel pour comprendre l'information à l'âge de l'informatique. L’espoir que les citoyens ordinaires soient instruits dans le domaine quantitatif est en fait un phénomène de la fin du vingtième siècle… Malheureusement, malgré des années d'étude et l'expérience de vivre dans un environnement immergé dans les données, beaucoup d’adultes instruits restent fonctionnellement illettrés. (…) La littératie quantitative responsabilise les gens, en leur donnant des outils pour penser par eux-mêmes [sic], pour poser des questions intelligentes aux experts, et pour affronter l'autorité avec assurance. Ce sont des compétences nécessaires pour réussir dans le monde moderne.

Une étude récente de l'American Diploma Project, intitulée *Ready or Not: Creating a High School Diploma That Counts* (www.amstat.org/education/gaise/1), décrit les compétences « à avoir », nécessaires à un bachelier « pour réussir dans les études post-bac ou dans des métiers de haute performance ou à fort potentiel ». Elles incluent, en plus de l'algèbre et de la géométrie, des notions d'analyse des données, de statistique et d'autres éléments, jugées essentielles pour d'autres raisons mais aussi pour obtenir un emploi dans l’économie d’aujourd’hui riche en données.

La formation en statistique telle que proposée dans ce *cadre* peut promouvoir les compétences « à avoir » nécessaires à un bachelier pour « réussir dans le monde moderne ».

7 Les référentiels du NCTM et le *cadre*

L'objectif principal de ce document est de fournir un *cadre* conceptuel pour la formation en statistique des élèves du primaire et du secondaire. Le fondement de ce *cadre* repose sur les *Principles and Standards for School Mathematics* du NCTM (2000).

Le *cadre* est destiné à compléter les recommandations du NCTM et non à les supplanter.

Les principes et référentiels du NCTM décrivent les contenus de statistique comme suit :

> Analyse des données et probabilité
>
> Les programmes d'instruction du primaire et secondaire devraient rendre tous les élèves capables :
> - de formuler des questions qui peuvent être abordées avec des données et de collecter, organiser et fournir des données pertinentes pour y répondre ;
> - de choisir et d'utiliser les méthodes statistiques appropriées pour analyser les données ;
> - de développer et d'évaluer les inférences et les prévisions qui sont basées sur les données ; et
> - de comprendre et d'appliquer les concepts de base de probabilité.

Le référentiel concernant « Analyse de données et Probabilité » recommande que les élèves formulent des questions auxquelles il est possible de répondre en utilisant des données et qu'ils exposent ce qui ressort d'un recueil judicieux et de l'utilisation de ces données. Les élèves devraient apprendre à collecter des données, à organiser leurs propres données ou d'autres données, à présenter les données dans des graphiques et des diagrammes qui seront utiles pour répondre à leurs questions. Ce référentiel inclut aussi l'apprentissage des méthodes d'analyse de données et les moyens de faire des inférences et de tirer des conclusions à partir des données. Les concepts de base et les applications des probabilités sont aussi concernés, en insistant sur le lien entre probabilités et statistiques.

Les principes et référentiels du NCTM donnent quelques détails sur ces thèmes et fournissent des exemples de leçons et d'activités qui pourraient être utilisées dans une salle de classe. On peut trouver des exemples plus complets dans le NCTM *Navigation Series on Data Analysis and Probability* (2002–2004). La statistique, cependant, est un sujet relativement nouveau pour beaucoup d'enseignants, qui n'ont pas eu l'occasion de développer une connaissance approfondie des principes et concepts sous-jacents à la pratique d'analyse des données qu'on leur demande maintenant d'enseigner. Ces enseignants ne comprennent pas clairement la différence entre statistique et mathématiques. Ils ne considèrent pas le curriculum de statistique du primaire et secondaire comme un curriculum ayant une cohésion et une cohérence. Ces enseignants peuvent ne pas voir comment l'ensemble du curriculum de statistique fournit une suite ordonnée d'expériences d'apprentissage.

Le *cadre* proposé ici fournit une structure conceptuelle pour l'enseignement de la statistique qui donne une image cohérente de l'ensemble du curriculum.

8 La différence entre Statistique et Mathématiques

« La statistique est une discipline méthodologique. Elle n'existe pas pour elle-même, mais plutôt pour offrir à d'autres domaines d'étude un ensemble cohérent d'idées et d'outils pour traiter des données. Le besoin d'une telle discipline résulte de *l'omniprésence de variabilité* » (Moore and Cobb, 1997).

Un objectif majeur de l'enseignement de la statistique est d'aider les élèves à développer la pensée statistique. La pensée statistique, en grande partie, doit prendre en compte cette omniprésence de variabilité ; la résolution d'un problème statistique et la prise de décision dépendent de la compréhension, de l'explication et de la quantification de la variabilité dans les données.

C'est cet accent mis sur *la variabilité dans les données* qui distingue la statistique des mathématiques.

8.1 La nature de la variabilité

Il y a plusieurs sources de variabilité dans les données. Quelques-unes des sources les plus importantes sont décrites ci-dessous.

Variabilité de la mesure — Des mesures répétées sur le même individu varient. Parfois deux mesures varient parce que l'appareil de mesure produit des résultats non fiables, comme quand on tente de mesurer une longue distance avec une petite règle. D'autres fois la variabilité résulte de changements dans le système mesuré. Par exemple, même avec un appareil de mesure précis, l'enregistrement de votre tension sanguine peut différer d'un moment à l'autre.

Variabilité naturelle — La variabilité est inhérente à la nature. Les individus sont différents. Quand nous mesurons la même quantité sur plusieurs individus, nous obtenons des mesures différentes. Bien qu'une partie de la différence puisse être due à notre appareil de mesure, la plus grande partie est simplement due au fait que les individus diffèrent. Les gens ont naturellement des tailles différentes, des aptitudes et des capacités différentes, des opinions et des réponses émotionnelles différentes. Quand nous mesurons n'importe lequel de ces caractères, nous obtenons une certaine variabilité dans les mesures. Des graines différentes pour la même variété de haricot atteindront des tailles différentes quand elles sont soumises au même environnement parce que deux graines ne sont pas exactement identiques ; il y a variabilité d'une graine à l'autre dans les mesures de croissance.

Variabilité induite — Si nous plantons un paquet de graines dans un champ, et un autre paquet dans un autre endroit avec un climat différent, alors une différence observée dans la croissance des graines d'un lieu avec celle de l'autre lieu peut être due à des différences inhérentes aux graines (variabilité naturelle), ou bien la différence observée peut être due au fait que l'emplacement est différent. Si un type d'engrais est utilisé dans un champ et un autre type dans l'autre champ alors la différence observée peut être due à la différence des engrais. Dans ce cas, la différence observée pourrait être due à un facteur auquel nous n'avons même pas pensé. Une expérimentation plus soigneusement conçue peut nous aider à déterminer les effets de différents facteurs. Cette seule idée de base, la comparaison de la variabilité naturelle et de la variabilité induite par d'autres facteurs, est au cœur de la statistique moderne. Elle a permis à la science médicale de conclure que certains médicaments sont efficaces et sans danger alors que d'autres sont inefficaces ou ont des effets secondaires dangereux. Elle a été utilisée par les agronomes pour démontrer qu'une variété de maïs pousse mieux sous un climat que sous un autre, qu'un engrais est plus efficace qu'un autre, qu'un type d'alimentation est meilleur pour des bœufs de boucherie qu'un autre.

Variabilité d'échantillonnage — Dans un sondage politique, il semble raisonnable d'utiliser la proportion des électeurs enquêtés qui soutiennent un candidat particulier (cas d'un échantillon statistique) comme une estimation de la proportion inconnue de tous les électeurs qui soutiennent ce candidat. Mais si on utilise un deuxième échantillon de même taille il est presque certain que l'on n'observera pas exactement la même proportion d'électeurs pour soutenir le candidat. La valeur de la proportion dans l'échantillon varie d'un échantillon à l'autre. C'est ce qu'on appelle la variabilité d'échantillonnage. Ainsi, peut-on obtenir un échantillon qui estime que la proportion réelle est de 0.60 et un autre échantillon qui l'estime à 0.40 ? Cela est possible mais peu probable si des techniques d'échantillonnage appropriées sont utilisées. Les résultats de sondage sont utiles parce que ces techniques et une taille adéquate d'échantillon peuvent assurer que des différences inacceptables parmi les échantillons sont très peu probables.

Une excellente discussion sur la nature de la variabilité est donnée dans *Seeing Through Statistics* (Utts, 1999).

8.2 Le rôle du contexte

« L'accent mis sur la variabilité naturelle donne à la statistique un contenu particulier qui la distingue des mathématiques elles-mêmes et d'autres sciences mathématiques, mais il y a davantage que le contenu qui distingue la pensée statistique des mathématiques. La statistique exige un mode de pensée différent parce que *les données ne sont pas simplement des nombres, elles sont des nombres dans un contexte*. En mathématiques, le contexte obscurcit la structure. Dans l'analyse des données, le contexte fournit du sens ». (Moore and Cobb, 1997).

De nombreux problèmes mathématiques résultent de contextes concrets, mais le contexte est supprimé pour révéler les structures mathématiques. Les statisticiens, comme les mathématiciens, recherchent les modèles mais le sens des modèles dépend du contexte.

Un graphique qui apparaît occasionnellement dans la section économie des journaux montre la courbe du Dow Jones Industrial Average (DJIA) sur une période de 10 ans. La variabilité des cours de bourse attire l'attention d'un investisseur. Cet indice boursier peut croître ou diminuer sur des intervalles de temps et peut chuter ou augmenter brusquement sur une courte période. Dans le contexte, le graphique pose question. Un investisseur sérieux s'intéresse non seulement à *quand et avec quelle vitesse* l'indice monte ou descend, mais aussi à *pourquoi*. Que se passait-il dans le monde quand le marché est monté ? Que se passait-il quand il a diminué ? Supprimez maintenant le contexte. Supprimez le temps (des années) de l'axe horizontal et appelez-le « X », supprimez la valeur des actions (DJIA) de l'axe vertical et appelez-le « Y » et il ne reste plus qu'un graphique de très peu d'intérêt et de faible contenu mathématique !

8.3 Probabilités

Les probabilités sont un outil pour la statistique.

Les probabilités sont une partie importante dans n'importe quelle éducation mathématique. C'est une partie des mathématiques qui enrichit le sujet dans son ensemble par ses interactions avec d'autres utilisations des mathématiques. La probabilité est un outil essentiel des mathématiques appliquées et de la modélisation mathématique. C'est aussi un outil essentiel de la statistique.

L'utilisation des probabilités dans la modélisation mathématique et l'utilisation des probabilités comme outil de la statistique emploient non seulement des approches différentes mais aussi des façons différentes de raisonner. Deux problèmes et la nature de leurs solutions vont illustrer la différence.

Problème 1 :
On suppose qu'une pièce de monnaie est équilibrée.
Question : Si on lance cette pièce cinq fois, combien de fois va-t-on obtenir le résultat Face ?

Problème 2 :
Vous prenez une pièce de monnaie.
Question : La pièce est-elle équilibrée ?

Le problème 1 est un problème mathématique de probabilité. Le problème 2 est un problème statistique qui peut utiliser le modèle probabiliste défini au Problème 1 comme outil pour chercher la solution.

Aucune des deux questions n'a de réponse déterministe. Le lancer d'une pièce produit des résultats aléatoires, ce qui suggère que la réponse est probabiliste. La solution du Problème 1 débute par l'hypothèse que la pièce est équilibrée et se poursuit par la *déduction* logique du calcul de la probabilité de l'obtention de chacun des résultats possibles : 0, 1,…, 5.

La solution du Problème 2 débute avec une pièce inconnue ; on ne sait pas si elle est ou non équilibrée. La recherche de la réponse est expérimentale — lancez la pièce et voyez ce qui se passe. Examinez les données obtenues pour voir si elles semblent provenir d'une pièce équilibrée ou non. Il y a plusieurs approches possibles, en incluant le lancer de la pièce cinq fois et l'enregistrement du nombre de fois où l'on obtient Face. Puis recommencez : lancez la pièce cinq fois et enregistrer le nombre de fois où l'on obtient Face. Répétez 100 fois l'expérience. Compilez les fréquences des résultats pour chaque nombre possible de Face. Comparez ces résultats aux fréquences que le modèle mathématique prédit pour une pièce équilibrée dans le Problème 1. Si les fréquences empiriques de l'expérimentation sont complètement différentes de celles que le modèle mathématique prédit avec une pièce équilibrée et ne semblent pas provenir d'une variation aléatoire dans les lancers de pièces, alors on conclut que la pièce n'est pas équilibrée. Dans ce cas nous *induisons* une réponse en tirant une conclusion à partir des observations de résultats expérimentaux.

8.4 Probabilités et variabilité due au hasard

C'est en *sondage aléatoire* et dans les *plans d'expériences* que l'on trouve deux utilisations importantes de la « randomisation » dans le travail statistique. Dans le cas d'un *sondage aléatoire*, on « sélectionne au hasard », et dans les *plans d'expériences* on « assigne au hasard » les individus aux différents traitements. La randomisation fait beaucoup plus que supprimer le biais dans les sélections et les assignations. La randomisation conduit à une *variabilité due au hasard* dans les résultats qui peut être décrite avec des modèles probabilistes.

La probabilité de quelque chose nous indique la fréquence avec laquelle on s'attend à ce qu'il se réalise quand l'expérience de base est répétée encore et encore. La théorie des probabilités ne dit pas grand-chose sur un seul lancer de pièce, elle fait des prévisions sur le comportement à long terme de nombreux lancers de pièce.

La théorie des probabilités nous informe peu sur les conséquences d'une sélection aléatoire d'un échantillon, mais elle décrit les variations à attendre dans les échantillons quand le processus d'échantillonnage est répété un grand nombre de fois. La théorie des probabilités nous informe peu sur les conséquences d'une assignation aléatoire pour une seule expérience, mais elle décrit les variations à attendre dans les résultats quand l'expérience est répétée un grand nombre de fois.

Quand l'aléatoire est présent, le statisticien veut savoir si le résultat observé est dû au hasard ou à autre chose. C'est là l'idée de *signification statistique*.

9 Le rôle des Mathématiques dans la formation statistique

Le fait que la statistique est différente des mathématiques n'est pas avancé pour faire valoir que les mathématiques ne sont pas importantes pour la formation statistique ou que la formation statistique ne devrait pas être une partie de la formation mathématique. Tout au contraire, la formation statistique devient de plus en plus mathématique au fur et à mesure que le niveau de compréhension s'élève. Mais on doit insister sur les plans de recueil de données, sur l'exploration des données et sur l'interprétation des résultats dans la formation statistique pour la littératie statistique. Ces éléments sont fortement dépendants du contexte et, à un niveau introductif, incluent peu de mathématiques formelles.

Les probabilités jouent un rôle important dans l'analyse statistique, mais le formalisme mathématique des probabilités doit avoir sa propre place dans le curriculum. La formation statistique du primaire et du secondaire devrait insister sur la façon dont les probabilités sont utilisées dans la pensée statistique ; une compréhension intuitive des probabilités sera suffisante à ces niveaux.

Le cadre

La résolution d'un problème statistique est un processus de recherche qui comprend quatre composantes (ou étapes) :

I. Formuler les questions :
- clarifier le problème en jeu ;
- formuler une (ou plusieurs) questions auxquelles des données peuvent répondre.

II. Recueillir des données :
- concevoir un plan pour recueillir des données appropriées ;
- utiliser ce plan pour collecter les données.

III. Analyser les données :
- choisir les méthodes graphiques et numériques appropriées ;
- utiliser ces méthodes pour analyser les données.

IV. Interpréter les résultats :
- interpréter l'analyse ;
- mettre en relation l'interprétation avec la question initiale.

1 Le rôle de la variabilité dans le processus de résolution du problème

I. Formuler les questions

Anticiper la variabilité – Distinguer ce qu'est une question statistique

La formulation d'une question statistique exige de comprendre la différence entre une question qui anticipe une réponse déterministe et une question qui anticipe une réponse fondée sur des données qui varient.

À la question « Quelle est ma taille ? », on ne répondra qu'avec une seule hauteur. Ce n'est pas une question statistique. La question « Combien mesurent les hommes adultes aux Etats-Unis ? » ne serait pas une question statistique si tous ces hommes avaient exactement la même taille ! Le fait qu'il existe des tailles différentes implique que nous nous attendons à une réponse fondée sur des mesures de taille qui varient. C'est une question statistique.

Celui qui se pose la question « Comment le soleil affecte la croissance d'une plante ? » devrait anticiper que la croissance de deux plantes du même type exposées à la même lumière du soleil sera probablement différente. C'est une question statistique.

L'anticipation de la variabilité est la base pour distinguer ce qu'est une question statistique.

II. Recueillir les données

Faire apparaître la variabilité – Plan pour l'étude de différences

Les plans de recueil de données doivent faire apparaître la variabilité dans les données, et sont souvent construits dans le but de réduire la variabilité. L'échantillonnage aléatoire est destiné à réduire les différences entre l'échantillon et la population. La taille de l'échantillon influe sur l'effet de la variabilité d'échantillonnage (erreur). Les plans d'expériences sont choisis pour faire apparaître les différences entre des groupes soumis à différents traitements. L'assignation aléatoire aux groupes vise à réduire les différences entre les groupes dues aux facteurs qui ne sont pas contrôlés dans l'expérience.

Certains plans d'expérience utilisent des paires de sujets lorsqu'ils sont similaires. Des jumeaux sont fréquemment appariés dans des expériences médicales de sorte que les différences observées puissent être plus probablement attribuées à la différence des traitements qu'à des différences entre les sujets.

La compréhension des plans de recueil de données qui fassent apparaître des différences est nécessaire pour une collecte efficace des données.

III. Analyser les données

Mesurer la variabilité - Utiliser des distributions

Le principal objectif de l'analyse statistique est de fournir une mesure de la variabilité dans les données. Quand les résultats d'un sondage électoral donnent « 42% des électeurs interrogés soutiennent un certain candidat avec une marge d'erreur de +/- 3% au niveau de confiance de 95% », l'accent est mis sur la variabilité d'échantillonnage. Le sondage fournit une estimation du soutien parmi tous les électeurs. La marge d'erreur indique de combien le résultat du sondage (42% +/- 3%) peut s'écarter du pourcentage réel de tous les électeurs qui soutiennent le candidat. Le niveau de confiance nous indique la fréquence avec laquelle les estimations produites par la méthode utilisée donneront des résultats corrects. Cette analyse est basée sur la distribution des estimations obtenues à partir d'échantillons aléatoires répétés.

Quand les scores des tests sont décrits comme « normalement distribués avec une moyenne de 450 et un écart-type de 100 », l'accent est mis sur l'écart des scores à la moyenne. La distribution normale décrit une courbe en cloche des scores, et l'écart-type indique un niveau de variation des scores autour de la moyenne. Mesurer la variabilité en utilisant les distributions est l'idée centrale de l'analyse des données.

IV. Interpréter les résultats

Tenir compte de la variabilité – Regarder au-delà des données

Les interprétations statistiques sont réalisées en présence de variabilité et doivent en tenir compte.

Le résultat d'un sondage électoral doit être interprété comme une estimation qui peut varier d'un échantillon à un autre. La généralisation des résultats du sondage à la population des électeurs va au-delà de l'échantillon des électeurs interrogés et doit tenir compte d'une possible variabilité des résultats entre différents échantillons. Les résultats d'une expérience aléatoire médicale comparative doivent être interprétés en présence d'une variabilité due au fait que les individus réagissent différemment au même traitement et d'une variabilité due à la randomisation. La généralisation des résultats va au-delà des données recueillies auprès des sujets ayant participé à l'expérience et doit tenir compte de ces sources de variabilité.

Voir au-delà des données pour faire des généralisations doit tenir compte de la variabilité dans les données.

2 Maturation au fur et à mesure des niveaux

Un statisticien expérimenté comprend le rôle de la variabilité dans le processus de résolution d'un problème statistique. Au moment de la formulation de la question, le statisticien anticipe la collecte de données, la nature de l'analyse et les interprétations possibles – qui sont toutes des sources possibles de variabilité. En fin de compte, le praticien expérimenté réfléchit à tous les aspects de la collecte de données et de l'analyse ainsi qu'à la question elle-même, lors de l'interprétation des résultats. De même, il ou elle relie entre elles la collecte de données et l'analyse et les deux autres composantes.

On ne s'attend pas à ce que des élèves débutants fassent tous ces liens. Ils exigent des années d'expérience et de formation. La formation statistique doit être considérée comme un processus de développement. Pour atteindre les objectifs proposés, le présent rapport fournit un cadre pour la formation statistique sur trois niveaux. Si l'objectif était de produire un statisticien praticien mature, il y aurait certainement plusieurs niveaux au-delà de ceux-ci. Il n'y a aucune tentative de lier ces niveaux à des niveaux scolaires spécifiques.

Le *cadre* utilise trois niveaux de développement : A, B et C. Bien que ces trois niveaux puissent être mis en parallèle avec les niveaux de scolarité (primaire, collège, lycée), ils sont basés sur le développement de la littératie statistique, et non sur l'âge. Ainsi, un élève du collège qui n'a pas eu une expérience préalable en statistique aura besoin, pour commencer, des concepts et des activités de niveau A avant de passer au niveau B. Cela est tout aussi vrai pour un élève du lycée. Si un élève n'a pas eu les expériences des niveaux A et B avant le lycée, il n'est pas conseillé à cet élève de commencer directement au niveau C.

L'apprentissage est davantage guidé par l'enseignant au niveau A, mais c'est l'élève qui gère son apprentissage aux niveaux B et C.

3 Le cadre

La structure conceptuelle pour la formation en statistique est fournie dans un cadre, à deux dimensions, présenté dans le Tableau 1. Une dimension est définie par les composantes du processus de résolution de problèmes ainsi que par la nature de la variabilité considérée et par la manière dont nous mettons l'accent sur la variabilité. La seconde dimension est constituée des trois niveaux de développement.

Chacune des quatre premières lignes décrit une composante du processus qui se développe au fur et à mesure des différents niveaux. La cinquième ligne indique la nature de la variabilité considérée à un niveau donné. Il est entendu que le travail au niveau B suppose connus et approfondis les concepts du niveau A, de même que le niveau C suppose connus et utilise les concepts des niveaux inférieurs.

La lecture vers le bas d'une colonne décrira la recherche complète d'un problème pour un niveau particulier ainsi que la nature de la variabilité considéré.

Composantes du processus	Niveau A	Niveau B	Niveau C
Formuler la question	Sensibilisation à la *distinction de questions statistiques* Les enseignants posent des questions d'intérêt. Questions limitées à la classe	Sensibilisation accrue à la *distinction de questions statistiques* Les élèves commencent à poser leurs propres questions d'intérêt. Les questions ne se limitent pas à la salle de classe.	Les élèves peuvent *distinguer les questions statistiques*. Les élèves posent leurs propres questions d'intérêt Les questions visent à la généralisation.
Recueillir des données	Pas encore de *plan pour l'étude de différences* Recensement dans la classe Expérience simple	Sensibilisation aux *plans pour l'étude de différences* Enquêtes par sondage ; début de l'utilisation de la sélection aléatoire. Expérience comparative début de l'utilisation de l'allocation aléatoire	Les élèves font des *plans pour l'étude de différences* Plans d'échantillonnage avec sélection aléatoire Plans expérimentaux avec randomisation
Analyser les données	*Utiliser* des propriétés particulières des *distributions* dans le cadre d'un exemple précis Représentation graphique de la variabilité au sein d'un groupe Comparaison individu à individu Comparer individu et groupe Sensibilisation à la comparaison de groupes Observer l'association entre deux variables.	Apprendre à *utiliser* des propriétés particulières de *distributions* comme outils d'analyse Quantifier la variabilité au sein d'un groupe Comparer graphiquement des groupes Reconnaître l'erreur d'échantillonnage Une certaine quantification des associations ; modèles simples d'association.	Comprendre et *utiliser les distributions* dans l'analyse comme un concept global Mesurer la variabilité dans un groupe ; mesurer la variabilité entre groupes Comparer graphiquement des groupes et mesures de la variabilité Décrire et quantifier l'erreur d'échantillonnage Quantification des associations ; ajustement de modèles d'association

Interpréter les résultats	Les élèves ne regardent pas *au-delà des données*. Aucune généralisation au-delà de la salle de classe Remarquer la différence entre deux individus dans des conditions différentes Observer graphiquement une association	Les élèves réalisent qu'on peut regarder *au-delà des données*. Reconnaître qu'un échantillon peut ou non être représentatif d'une population plus grande Noter la différence entre deux groupes dans des conditions différentes Prendre conscience de la distinction entre une étude observationnelle et une expérimentation Noter des différences dans la force de l'association Interprétation basique des modèles d'association Prendre conscience de la distinction entre association et cause et effet	Les élèves sont capables de regarder *au-delà des données* dans certains contextes Généraliser de l'échantillon à la population Prendre conscience de l'effet de la randomisation sur les résultats des expériences Comprendre la différence entre études observationnelles et expérimentations Interpréter les mesures de force de l'association Interpréter les modèles d'association Distinguer les conclusions des études d'association de celles des expérimentations
Nature de la variabilité	Variabilité des mesures Variabilité naturelle Variabilité induite	Variabilité d'échantillonnage	Variabilité due au hasard
Accent sur la variabilité	Variabilité à l'intérieur d'un groupe	Variabilité à l'intérieur d'un groupe et variabilité entre groupes Covariabilité	Variabilité dans l'ajustement d'un modèle

4 Illustrations

Les quatre étapes du processus de résolution de problème sont utilisées dans les trois niveaux, mais la profondeur de la compréhension et la sophistication des méthodes utilisées augmentent au cours des niveaux A, B et C. Cette maturation dans la compréhension du processus de résolution de problème et de ses concepts sous-jacents s'accompagne d'une complexité croissante dans le rôle de la variabilité. Les illustrations des activités d'apprentissage présentées ici sont destinées à clarifier les différences entre les niveaux de développement pour chaque composante du processus de résolution de problèmes. Les sections suivantes donnent des exemples de la résolution complète de problèmes pour les activités d'apprentissage à chaque niveau.

I. Formuler des questions

Exemple : Longueur des mots

Niveau A : Quelle est la longueur des mots de cette page ?

Niveau B : Les mots d'un chapitre d’un livre de cinquième année sont-ils plus longs que les mots d'un chapitre d'un livre de troisième année ?

Niveau C : Est-ce que les livres de cinquième année utilisent des mots plus longs que les livres de troisième année ?

Exemple : Type de musique préféré

Niveau A : Quel type de musique est préféré par les élèves de notre classe ?

Niveau B : Les types préférés de musique sont-ils comparables entre les différentes classes ?

Niveau C : Quel type de musique est préféré par les élèves de notre école ?

Exemple : Taille et envergure des bras

Niveau A : Dans notre classe, la taille et l'envergure des bras des élèves sont-elles à peu près semblables ?

Niveau B : La relation entre l'envergure des bras et la taille des élèves de notre classe est-elle comparable à la relation entre l'envergure des bras et la taille des élèves d’une autre classe ?

Niveau C : La taille est-elle un prédicteur utile pour l'envergure des bras des élèves de notre école ?

Exemple : Croissance des plantes

Niveau A : Est-ce qu'une plante placée près d'une fenêtre pousse davantage qu'une plante éloignée de la fenêtre ?

Niveau B : Est-ce que cinq plantes placées près d'une fenêtre poussent davantage que cinq plantes placées loin d'une fenêtre ?

Niveau C : Comment le niveau de la lumière du soleil affecte-t-il la croissance des plantes ?

II. Recueillir des données

Exemple : Longueur des mots

Niveau A : Quelle est la longueur des mots de cette page ?
La longueur de chaque mot de la page est déterminée et enregistrée.

Niveau B : Les mots d'un chapitre d'un livre de cinquième année sont-ils plus longs que les mots d'un chapitre d'un livre de troisième année ?
Un échantillon aléatoire simple de mots de chaque chapitre est utilisé.

Niveau C : Est-ce que les livres de cinquième année utilisent des mots plus longs que les livres de troisième année ?
Différents plans d'échantillonnage sont examinés et comparés, et certains sont utilisés. Par exemple, plutôt que de choisir un échantillon aléatoire simple de mots, on choisit un échantillon aléatoire simple de pages de l'ouvrage et tous les mots des pages choisies sont utilisés pour l'échantillon.

Remarque : A chaque niveau, on doit se poser la question de la mesure. La longueur du mot dépend de la définition de « mot ». Par exemple, est ce qu'un nombre est un mot ? La cohérence de la définition permet de réduire la variabilité des mesures.

Exemple : Croissance des plantes

Niveau A : Est-ce qu'une plante placée près d'une fenêtre pousse davantage qu'une plante éloignée de la fenêtre ?
Une plante est plantée dans un pot qui est placé sur le rebord de la fenêtre. Une deuxième plante de même type et de même taille est plantée dans un pot qui est placé à distance de la fenêtre. Après six semaines, on mesure et on enregistre le changement de taille de chaque plante.

Niveau B : Est-ce que cinq plantes placées près d'une fenêtre poussent davantage que cinq plantes placées loin d'une fenêtre ?
Cinq plantes de même type et de même taille sont plantées dans un récipient placé sur le rebord d'une fenêtre. Cinq plantes du même type et de même taille sont plantées dans un récipient placé à distance de la fenêtre. Des nombres au hasard sont utilisés pour décider quelles plantes seront plantées dans quel récipient. Après six semaines, on mesure et on enregistre le changement de taille de chaque plante.

Niveau C : Comment le niveau de la lumière du soleil affecte-t-il la croissance des plantes ?
Quinze plantes de même type et de même taille sont sélectionnées. Trois récipients sont utilisés, avec cinq de ces plantes plantées dans chacun d'eux. Quinze jeunes plantes d'une autre variété sont sélectionnées afin de déterminer si l'effet de la lumière du soleil est le même sur les différents types de plantes. Cinq d'entre elles sont plantées dans chacun des trois bacs. Les trois bacs sont placés en trois endroits avec différents niveaux de lumière. Des nombres aléatoires sont utilisés pour décider quelles plantes vont dans quel bac. Après six semaines, on mesure et on enregistre le changement de taille de chaque plante.

Remarque : A chaque niveau, on doit se poser la question de la mesure. La méthode de mesure de la variation de taille doit être clairement comprise et appliquée afin de réduire la variabilité des mesures.

III. Analyser les données

Exemple : Type de musique préféré

Niveau A : Quel type de musique est préféré par les élèves de notre classe ?
On utilise un graphique en barres pour représenter le nombre d'élèves qui choisissent chaque type de musique.

Niveau B : Les types préférés de musique sont-ils comparables entre les différentes classes ?
Pour chaque classe, on utilise un graphique en barres pour représenter le pourcentage d'élèves qui ont choisi chaque type de musique. Les mêmes échelles sont utilisées pour les deux graphiques de telle sorte qu'on puisse facilement les comparer.

Niveau C : Quel type de musique est préféré par les élèves de notre école ?
On utilise un graphique en barres pour représenter le pourcentage d'élèves qui ont choisi chaque type de musique. Comme on utilise un échantillon aléatoire, on fournit une estimation de la marge d'erreur.

Remarque : A chaque niveau, on doit se poser la question de la mesure. Un questionnaire sera utilisé pour recueillir les préférences musicales des élèves. La conception et la formulation du questionnaire doivent être soigneusement étudiées pour éviter d'éventuels biais dans les réponses. Le choix des types de musique pourrait également affecter les résultats.

Exemple : Taille et envergure des bras

Niveau A : Dans notre classe, la taille et l'envergure des bras des élèves sont-elles à peu près semblables ?
La différence entre la taille et l'envergure des bras est déterminée pour chaque individu. Un graphique X-Y (nuage de points) est construit avec X = taille, Y = envergure des bras. La droite $Y = X$ est tracée sur ce graphique.

Niveau B : La relation entre l'envergure des bras et la taille des élèves de notre classe est-elle comparable à la relation entre l'envergure des bras et la taille des élèves d'une autre classe ?
Pour chaque classe, un graphique X-Y est construit avec X = taille, Y = envergure des bras. Une droite est tracée « à vue d'œil » sur chaque graphique pour décrire la relation entre la taille et l'envergure des bras. L'équation de cette droite est déterminée. Une mesure élémentaire d'association est calculée.

Niveau C : La taille est-elle un prédicteur utile pour l'envergure des bras des élèves de notre école ?
La droite de régression des moindres carrés est déterminée et évaluée pour être utilisée comme un modèle de prévision.

Remarque : A chaque niveau, on doit se poser la question de la mesure. Les méthodes utilisées pour mesurer la taille et l'envergure des bras doivent être clairement comprises et appliquées afin de réduire la variabilité des mesures. Par exemple, mesure-t-on la taille avec ou sans chaussures ?

IV. Interpréter les résultats

Exemple : Longueur des mots

Niveau A : Quelle est la longueur des mots de cette page ?

Le « diagramme en points » de toutes les longueurs de mot est examiné et résumé. En particulier, les élèves noteront les longueurs des mots les plus courts et les plus longs, les longueurs les plus communes et les moins communes, et la longueur au milieu.

Niveau B : Les mots d'un chapitre d'un livre de cinquième année sont-ils plus longs que les mots d'un chapitre d'un livre de troisième année ?
Les élèves interprètent une comparaison de la distribution d'un échantillon de longueurs des mots d'un livre de cinquième année avec la distribution des longueurs de mots d'un livre de troisième année en utilisant un « diagramme en boîte » pour représenter chacune d'elles. Les élèves prennent conscience également qu'on utilise des échantillons qui peuvent, ou non, être représentatifs de chapitres entiers. Le diagramme en boîte de l'échantillon de longueurs de mots du livre de cinquième année est juxtaposé avec le diagramme en boîte de l'échantillon issu du livre de troisième année.

Niveau C : Est-ce que les livres de cinquième année utilisent des mots plus longs que les livres de troisième année ?
L'interprétation au niveau C intègre l'interprétation au niveau B, mais doit également envisager la généralisation à partir des livres inclus dans l'étude à une population plus vaste de livres.

Exemple : Croissance des plantes

Niveau A : Est-ce qu'une plante placée près d'une fenêtre pousse davantage qu'une plante éloignée de la fenêtre ?
Dans cette expérience simple, l'interprétation est juste une question de comparaison entre une mesure de la variation de la taille et une autre.

Niveau B : Est-ce que cinq plantes placées près d'une fenêtre poussent davantage que cinq plantes placées loin d'une fenêtre ?
Dans cette expérience, l'élève doit interpréter une comparaison entre un groupe de cinq mesures avec un autre groupe. Si une différence est constatée, l'élève reconnaît qu'elle est probablement causée par la différence de conditions d'éclairage.

Niveau C : Comment le niveau de la lumière du soleil affecte-t-il la croissance des plantes ?
Il y a plusieurs comparaisons de groupes possibles dans ce plan d'expériences. Si une différence est constatée, l'élève reconnaît qu'elle est probablement causée par la différence des conditions de luminosité ou par la différence des types de plantes. Il reconnaît aussi que la randomisation utilisée dans l'expérience peut donner lieu à certaines des différences observées.

Nature de la variabilité

L'accent sur la variabilité devient de plus en plus sophistiqué au fur et à mesure que l'élève progresse dans les niveaux de développement.

Variabilité à l'intérieur d'un groupe

C'est le seul type pris en compte au niveau A. Dans l'exemple de la longueur des mots, les différences entre longueurs de mots d'une seule page sont prises en compte ; il s'agit de variabilité à l'intérieur d'un groupe de longueurs de mots. Dans l'exemple du type de musique préféré, on prend en compte les différences entre les nombres d'élèves qui choisissent chaque type de musique ; il s'agit de variabilité à l'intérieur d'un groupe d'effectifs.

Variabilité à l'intérieur d'un groupe et variabilité entre groupes

Au niveau B, les élèves commencent à faire des comparaisons de groupes de mesures. Dans l'exemple de la longueur de mots, un groupe de mots extrait d'un livre de cinquième année est comparé à un groupe extrait d'un livre de troisième année. Pour une telle comparaison, on observe, non seulement en quoi diffèrent les longueurs de mots au sein de chaque groupe, mais également les différences entre les deux groupes, tels que la différence entre les médianes ou les moyennes des longueurs de mots.

Covariabilité

Au niveau B, les élèves commencent aussi à rechercher une relation « statistique » entre deux variables. La nature de cette relation statistique est décrite par la façon dont les deux variables « co-varient ». Dans l'exemple de la taille et de l'envergure du bras, par exemple, si les tailles de deux élèves diffèrent de deux centimètres, alors on aimerait que notre modèle de relation nous dise quelle différence on peut attendre dans la différence des envergures de bras.

Variabilité dans l'ajustement d'un modèle

Au niveau C, les élèves évaluent dans quelle mesure une droite de régression permet de prédire les valeurs d'une variable à partir des valeurs d'une autre variable en utilisant le graphe des résidus. Dans l'exemple de la taille et de l'envergure du bras, par exemple, cette appréciation repose sur le fait de savoir si les différences réelles des envergures de bras et les envergures prédites par le modèle varient aléatoirement autour de la droite horizontale de « pas de différence » dans le graphe des résidus. L'inférence sur une valeur prédite de Y pour une valeur donnée de X n'est valide que si les valeurs de Y varient de façon aléatoire selon une loi normale centrée sur la ligne de régression. Les élèves de niveau C apprennent à estimer cette variabilité autour de la droite de régression en utilisant l'estimation de l'écart type des résidus.

Variabilité induite

Dans l'exemple de la croissance des plantes au niveau B, l'expérience est conçue pour déterminer s'il y aura une différence entre la croissance des plantes dans la lumière du soleil et celle des plantes à l'abri du soleil. Nous voulons déterminer si une différence imposée sur les environnements va induire une différence dans la croissance.

Variabilité d'échantillonnage

Dans l'exemple de la longueur des mots au niveau B, on utilise des échantillons de mots extraits d'un chapitre. Les élèves observent que deux échantillons vont produire des groupes de longueurs de mots différents. C'est la variabilité d'échantillonnage.

Variabilité due au hasard en sondage

Lorsque la sélection aléatoire est utilisée, les différences entre les échantillons seront dues au hasard. La compréhension de cette variation due au hasard est ce qui conduit à la prévisibilité des résultats. Dans l'exemple du type de musique préféré au niveau C, cette variation due au hasard n'est pas seulement prise en compte, mais elle est aussi la base pour comprendre le concept de marge d'erreur.

Variabilité du hasard résultant de l'assignation à des groupes dans des expériences

Dans l'exemple de la croissance des plantes au niveau C, les plantes sont assignées au hasard à des groupes. Les élèves réfléchissent à la façon dont cette variation due au hasard dans les assignations aléatoires pourrait produire des différences dans les résultats, même si une analyse formelle n'est pas réalisée.

5 Description détaillée de chaque niveau

Comme ce document s'étend sur des descriptions détaillées de chaque niveau, il est important de noter que les exemples choisis pour illustrer les concepts clés et le processus de résolution de problème d'un raisonnement statistique sont basés sur des données réelles et des contextes réels.

Les lecteurs qui souhaitent utiliser ce document devront faire preuve de souplesse dans l'adaptation de ces exemples à leur contexte d'enseignement.

Annexe 2 – Présentation succincte des programmes français

Nous décrivons succinctement dans cette section les programmes de statistique (et probabilités) français pour le collège et pour la série scientifique du lycée d'enseignement général. C'est la série dans laquelle s'engagent les scientifiques en général, les futurs professeurs de mathématiques en particulier ; c'est eux qui sont chargés d'enseigner statistique et probabilités dans le secondaire. On donne en références les liens sur les programmes de mathématiques dont sont extraits les éléments présentés ci-dessous. Pour une description plus extensive du curriculum statistique au niveau du collège et du lycée, nous renvoyons dans ce numéro à la contribution de Jean-Pierre Raoult.

Les programmes français sont présentés selon trois volets : connaissances, capacités attendues et commentaires. Nous donnons exhaustivement le contenu du premier volet avec, entre parenthèses, quelques précisions données dans les autres volets.

Pour le collège (classes de sixième à troisième), il est recommandé d'utiliser *calculatrices* et *tableurs* et de travailler les *thèmes de convergence*[7] disciplinaire.

Pour le lycée (classes de seconde, première S et terminale S), les programmes se terminent par deux paragraphes communs aux trois niveaux d'enseignement : un paragraphe sur une initiation à l'algorithmique, l'autre sur l'utilisation des notations mathématiques et du raisonnement logique. Il est recommandé d'utiliser l'*algorithmique* pour la mise en œuvre des activités relevant de statistique et probabilités.

Classe de sixième – *Organisation et représentation de données*

Représentations usuelles : tableaux (tableaux en deux ou plusieurs colonnes, tableaux à double entrée) / Repérage sur un axe / Représentations usuelles : diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires ou demi-circulaires, graphiques cartésiens

Classe de cinquième – *Représentation et traitement de données*

Effectifs, fréquences. Classes (regrouper des données en classes d'égale amplitude) / Tableau de données, représentations graphiques de données (diagrammes divers, histogramme avec classes d'égale amplitude)

Classe de quatrième – *Traitement de données*

Moyennes pondérées (moyennes et moyennes pondérées)

Classe de troisième – *Statistique et notion de probabilité*

Caractéristiques de position (médiane, quartiles) / Approche de caractéristiques de dispersion (étendue)

(La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations, pièces de monnaie, dés, roues de loterie, urnes, etc. ; expériences aléatoires à une ou à deux épreuves)

Classe de seconde

Statistique descriptive, analyse de données

Caractéristiques de position et de dispersion, médiane, quartiles, moyenne

[7] Cf. article de Jean-Pierre Raoult pour la présentation de ces thèmes de convergence au collège, le premier étant intitulé « Importance du mode de pensée statistique dans le regard scientifique sur le monde ».

Échantillonnage

Notion d'échantillon (un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience) / Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95%* / Réalisation d'une simulation

(* L'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille n. Cet intervalle peut être obtenu, de façon approchée, par simulation)

Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité d'un événement

(Utiliser des situations d'équiprobabilité, utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées. La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux)

Réunion et intersection de deux événements, formule : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$

Classe de première S

Statistique descriptive, analyse de données

Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type / Diagramme en boîte

Probabilités

Variable aléatoire discrète et loi de probabilité. Espérance, variance et écart-type (On démontre les formules suivantes : $E(aX + b) = aE(X) + b,\ V(aX) = a^2V(X)$)

Modèle de répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues (pour un tel modèle, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme. On peut traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée)

Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. Schéma de Bernoulli, loi binomiale du nombre de succès. Coefficients binomiaux, triangle de Pascal.

(Démontrer que : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$).

Échantillonnage

Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence.

(Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale*, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion. L'objectif est d'amener les élèves à expérimenter la notion de « différence significative » par rapport à une valeur attendue. Le vocabulaire des tests (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.)

(* L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une fréquence F, correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n, de la variable aléatoire X égale à nF

et de loi binomiale de paramètres n et p, est l'intervalle $[a/n\,;\ b/n]$ défini par le système de conditions suivant :

a est le plus grand entier tel que $P(X < a) \leq 0{,}025$,

b est le plus petit entier tel que $P(X > b) \leq 0{,}025$,

ou encore par le système de conditions équivalent :

a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$,

b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.)

Classe de terminale S – *Probabilités et statistique*

Conditionnement et indépendance

Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation : $P_A(B)$. Indépendance de deux événements. (Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers. Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\bar{A}$ et B. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve.)

Notion de loi à densité à partir d'exemples

Loi à densité sur un intervalle / Loi uniforme sur $[a, b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme / Lois exponentielles. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle / Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Théorème de Moivre Laplace (admis) / Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.

Intervalle de fluctuation

(intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence, à un seuil donné)

Estimation

Intervalle de confiance (estimer par intervalle une proportion inconnue à partir d'un échantillon, l'intervalle est centré sur la fréquence de l'échantillon). Niveau de confiance (déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95)