

## Un problème clé de la paléodémographie : comment estimer l'âge au décès ?

**Title:** A key problem in paleodemography: how to estimate age at death?

Henri Caussinus<sup>1</sup>, Luc Buchet<sup>2</sup>, Daniel Courgeau<sup>3</sup> et Isabelle Séguy<sup>2,3</sup>

**Résumé :** Un problème important de la paléodémographie est l'estimation de la distribution des âges au décès dans des populations historiques sans état civil au travers de restes osseux sur lesquels sont mesurés des indicateurs biologiques de vieillissement. La distribution d'un indicateur conditionnellement à l'âge chronologique est fournie par des données de référence pour lesquelles les deux âges (civil et biologique) sont connus. Ces données sont difficiles à contrôler car issues d'une collection ostéologique suffisamment ancienne pour être représentative des périodes historiques intéressant les paléodémographes. Nous examinons d'abord si le statisticien peut apporter un éclairage complémentaire aux multiples débats entre paléodémographes sur leur fiabilité. Nous considérons ensuite l'estimation de la distribution des âges au décès sur un site archéologique à partir de ces données de référence et de l'indicateur biologique relevé sur les squelettes découverts dans ce site. A première vue, il s'agit d'un problème statistique simple. Cependant, les premières approches proposées par les paléodémographes se sont avérées décevantes. Cherchant à les améliorer, nous avons récemment proposé une méthode bayésienne dans le but d'incorporer un maximum d'informations a priori sur la distribution à estimer. Nous rappelons le principe de la méthode puis, nous appuyant à la fois sur des théories démographiques et diverses données disponibles, nous approfondissons la réflexion sur la meilleure façon de prendre en compte les connaissances a priori disponibles. La démarche est illustrée sur plusieurs sites médiévaux, ainsi qu'un site plus récent pour lequel la connaissance de données d'état civil permet de vérifier un certain nombre de nos affirmations.

**Abstract:** An important problem in paleodemography is to estimate the distribution of ages at death for historical populations without civil registration data, by means of biological indicators of ageing measured on skeletal remains. The conditional distribution of a biological indicator given age is provided by reference data of known sex and age. These data are difficult to control since they are drawn from a population that must be ancient enough to be representative of the periods of interest for paleodemographers. We first examine to which extent the statistician can throw a new light on the numerous discussions between paleodemographers about the reliability of the reference data. Then we consider the estimation of the distribution of age at death on a given site by means of these reference data and the measures of a biological indicator on available skeletal remains. This seems to be an easy statistical problem. However, the first approaches used by paleodemographers turned out to be disappointing. We have recently proposed a Bayesian method able to improve them by introducing prior informations about the distribution to be estimated. Resting both on demographic theory and available data, we consider new ways for taking into account the whole prior knowledge. The approach is illustrated on several mediaeval sites, and a more recent site where civil registrations are available, which allows us to verify some of our conclusions.

**Mots-clés :** Loi a priori, loi de Dirichlet, méthodes bayésiennes, modèle RC de Goodman, paléodémographie, synostose crânienne

**Keywords:** Bayesian methods, cranial sutures synostosis, Dirichlet distribution, Goodman's RC-model, prior distribution, paleodemography

**Classification AMS 2000 :** 62F15, 62F25, 62P25

<sup>1</sup> Institut de Mathématiques, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.

E-mail : [henri.caussinus@math.univ-toulouse.fr](mailto:henri.caussinus@math.univ-toulouse.fr)

<sup>2</sup> CEPAM, Université Côte d'Azur, CNRS, CEPAM, France.

<sup>3</sup> Institut national d'études démographiques (INED), Paris, France.

## 1. Introduction

Si le développement de l'informatique et des moyens de collecte et de traitement des données ont conduit à l'explosion des méthodes statistiques traitant d'énormes masses d'informations plus ou moins structurées, il reste sans doute de nombreux domaines dans lesquels les données sont parcimonieuses et, de plus, peu fiables. C'est vrai sans doute dans beaucoup de questions de nature historique, en particulier dans l'exemple que nous traitons ici. Pour l'essentiel, nous verrons deux aspects des problèmes susceptibles de se poser :

- Que peut apporter une méthode statistique dans la critique de données anciennes au-delà de l'examen premier qui est évidemment du ressort des historiens (ici des paléodémographes) ?
- En présence de données peu nombreuses, que peut apporter le dialogue avec les spécialistes pour raisonnablement formaliser un maximum d'information provenant de leur connaissance préalable du sujet ?

Il sera clair que les deux points ci-dessus nécessitent un dialogue étroit entre les tenants de la discipline (on pourrait même dire des disciplines : démographie, histoire, archéologie, bio-anthropologie) et les statisticiens, et exigent que chacun fasse plusieurs pas vers l'autre.

Le thème que nous traitons relève de processus biologiques autant que sociaux. Il s'agit d'estimer la distribution par âges au décès d'une population étudiée du point de vue de ses individus décédés et exhumés par des fouilles archéologiques. Cette distribution est en effet étroitement liée à la question posée dès l'origine de la démographie par [Graunt \(1662\)](#) : Combien y-t-il de gens dans chaque groupe septennal ou décennal d'âge ? A cette époque, à Londres, on ne mesurait pas l'âge des individus et les registres n'enregistraient que les décès par cause, les naissances et les mariages. A partir de ces effectifs, Graunt arrive cependant à une estimation très approximative de la population par groupe d'âges (il utilise en particulier pour ce faire la notion de probabilité qui venait juste d'apparaître avec Pascal, Fermat et Huygens). Dans certains cas exceptionnels, comme le couvent de Maubuisson au XVIII<sup>e</sup> siècle, il est possible de s'appuyer sur des sources pré-statistiques décrivant la population archéologique étudiée ; nous nous en sommes servis pour valider les méthodes que nous proposons : voir par exemple [Séguy et Buchet \(2011, 2013\)](#); [Séguy et al. \(2013\)](#) ou [Caussinus et Courgeau \(2010\)](#). Cependant, plus on remonte dans le temps, plus l'absence d'état civil et de mesure de l'âge au décès est criante.

Le paléodémographe est donc contraint d'estimer l'âge au décès à partir de squelettes sur lesquels il mesure diverses quantités liées plus ou moins étroitement à cet âge. L'approche est différente selon qu'il s'agit de jeunes dont la croissance n'est pas achevée ou d'adultes. C'est l'âge de ces derniers qui nous occupera ici, la frontière étant fixée biologiquement entre 18 et 19 ans quand la synostose de la synchondrose sphéno-occipitale est complète. Les indicateurs de croissance proprement dite ne sont plus de mise ; parmi les indicateurs de sénescence qui sont envisageables nous avons choisi la mesure de la synostose des sutures crâniennes. La synostose est une fusion plus ou moins complète d'un ou plusieurs os. A la naissance, le crâne est composé d'os qui sont séparés par des articulations immobiles, les sutures. Ces sutures ne sont pas ossifiées, permettant ainsi au crâne de se développer quand le cerveau grandit. La synostose débute vers 18-19 ans et se poursuit jusqu'à plus de 70 ans, ce qui explique l'intérêt précoce que les anthropologues lui ont porté dans leur souci d'attribuer un âge aux squelettes qu'ils étudiaient. Son utilisation a été expliquée dans diverses publications comme [Séguy et Buchet \(2011, 2013\)](#); [Séguy et al. \(2013\)](#). Pour estimer l'âge biologique d'un squelette, les sutures ne



FIGURE 1: Crâne montrant les sutures sagittale et coronale (la suture lamdoïde est cachée).

sont pas considérées globalement mais par secteurs définis sur les sutures sagittale (S1 à S4), coronale (C1 à C3) et lamdoïde (L1 à L3) : voir la figure 1 pour les secteurs C et S, les secteurs L étant invisibles sur cette photo (à la base arrière du crâne comme indiqué). Le degré de synostose est noté pour chacun des segments selon une échelle allant de 0 à 4. Par exemple, sur le crâne photographié, les segments S1 et S2 sont de score 1 (seuls quelques points sont soudés), S3 est de score 3 (suture presque totalement fermée) et S4 de score 4 (ossification totale). La moyenne de ces scores constitue le « coefficient de synostose », donnée de base des calculs qui seront développés par la suite. Certaines critiques ont été formulées sur l'utilisation de cet indicateur biologique d'âge, comme une possible variation de sa mesure d'un expert à l'autre. Il semble très difficile, voire impossible, de prendre en compte cette variabilité dans l'analyse statistique d'autant que le premier problème concerne les données de référence. On peut cependant dire deux choses :

- le regroupement des mesures en seulement cinq stades (et la façon dont ce regroupement a été fait) doit pallier l'essentiel des variations entre experts ;
- la question de la variabilité de l'expertise ne se pose pas dans la comparaison, avec les mêmes données de référence, de deux sites expertisés par la même personne.

Il convient finalement de préciser que le paléodémographe est intéressé par une population et donc par la distribution des âges sur le site funéraire étudié (on dira « structure par âges au décès »). On pourra aussi se poser la question de l'âge au décès d'un sujet donné, mais c'est un aspect de moindre intérêt en paléodémographie (alors qu'il peut être primordial dans d'autres domaines, comme la médecine légale : voir par exemple [Chariot et Caussinus \(2015\)](#)) ; remarquons seulement que cette estimation de l'âge d'un sujet doit se faire après estimation de la structure par âges au décès (relation (2) ci-dessous), alors que, jusqu'au Manifeste de Rostock ([Hoppa et Vaupel, 2002](#)) la plupart des travaux de paléodémographie cherchaient au contraire à estimer l'âge réel de chaque sujet à partir de son âge osseux pour en déduire la structure par âges au décès.

Dans un premier temps, nous poserons le problème en insistant sur les données dont nous disposons pour estimer les paramètres d'intérêt, données dont nous discuterons la pertinence et la fiabilité. Nous rappellerons ensuite la méthode statistique que nous préconisons pour l'estimation des paramètres et examinerons diverses voies susceptibles de l'améliorer.

## 2. Modèle et données

Pour un site donné (par site nous entendons un lieu et une période historique), l'âge biologique d'un sujet est défini par un stade osseux  $i$  ( $i = 1, \dots, r$ ), son âge calendaire (âge « réel » que l'on pourra appeler simplement âge) est lui aussi discrétisé, défini par l'appartenance à une classe d'âge  $j$  ( $j = 1, \dots, c$ ). On note :

- $p_{ij}$  la probabilité que le stade osseux soit  $i$  et l'âge réel  $j$ ,
- $p_j$  la probabilité que l'âge réel soit  $j$ ,
- $\pi_i$  la probabilité que le stade osseux soit  $i$ ,
- $p_{j/i}$  la probabilité qu'un individu soit d'âge  $j$  sachant que son stade osseux est  $i$ ,
- $p_{i/j}$  la probabilité qu'un individu soit dans le stade  $i$  sachant que son âge est  $j$ .

Ces paramètres sont liés par les relations :

$$\forall i = 1, \dots, r, \quad \sum_j p_j p_{i/j} = \pi_i, \quad (1)$$

et

$$\forall i = 1, \dots, r, \forall j = 1, \dots, c, \quad p_{j/i} = \frac{p_j p_{i/j}}{\sum_h p_h p_{i/h}}. \quad (2)$$

Le but est d'estimer les paramètres  $p_j$  pour  $j = 1, \dots, c$ .

On dispose pour cela de deux types de données.

Les données relevées sur un site consistent en un échantillon de taille  $m$  fournissant les fréquences  $m_i$  des divers stades osseux. On notera  $M$  le vecteur des  $m_i$ ; il est naturel de considérer que sa distribution est multinomiale de paramètres  $m$  et  $\pi_i$ , ( $i = 1, \dots, r$ ), sous réserve qu'il n'y ait pas de biais d'échantillonnage. Vérifier la validité de cette condition relève du paléodémographe et concerne les conditions dont les fouilles ont été menées aussi bien que celles dont les stades osseux ont été mesurés.

Les données dites « de référence » consistent en un tableau  $r \times c$  croisant âge osseux (lignes) et âge réel (colonnes) sur un échantillon d'individus pour lesquels les deux âges sont connus.

### 3. Analyse critique des données de référence

Notons  $n_{ij}$  le nombre de cas où l'âge osseux est  $i$ , l'âge réel est  $j$ ,  $n_{i+}$  et  $n_{+j}$  les totaux du tableau de référence correspondant aux  $n_{ij}$ , respectivement par lignes et par colonnes.

Le tableau ainsi constitué provient d'une population ayant une structure par âges (réels) bien déterminée (la distribution marginale par colonnes). L'utiliser pour estimer les  $p_{j/i}$  serait donc incorrect puisque la population étudiée n'a aucune raison d'avoir une telle structure par âges et que c'est justement cette structure inconnue que l'on cherche à évaluer. Après plusieurs travaux qui n'avaient pas pris en compte cette difficulté (connue dans d'autres domaines sous le nom de « covariate shift ») ou avaient cherché à la contourner de façon insatisfaisante, les paléodémographes ont abandonné toute « lecture en ligne » du tableau pour ne retenir qu'une « lecture en colonne » qui permet une estimation des probabilités conditionnelles  $p_{i/j}$  sur la population de référence. Celle-ci restera valide pour le problème envisagé si ces probabilités conditionnelles peuvent être considérées comme égales dans la population de référence et sur le site étudié. Une telle hypothèse d'invariance (dite encore d'uniformité biologique) est incontournable pour aller plus loin. Elle revient à admettre que les populations archéologiques sur lesquelles nous travaillons ne présentent pas de différence, en termes de processus de vieillissement biologique, avec celles qui ont conduit à l'établissement des données de référence, les unes comme les autres pouvant être considérées comme des populations préindustrielles (ou pré-transitionnelles). Sa légitimité est discutée en détail dans nombre de travaux (voir par exemple [Séguy et Buchet, 2011, 2013](#) qui concluent que cette hypothèse d'invariance est acceptable, au moins en première approximation.

La population de référence que nous utilisons provient de plusieurs collections ostéologiques portugaises, relativement homogènes, toutes de la période préindustrielle. Il s'agit pour partie des observations relevées par Maria.-E. de Castro E Almeida et Antonio Vicente, dans les années 1973-76, sur les crânes de la Collection de Ferraz de Macedo, aujourd'hui détruite, complétées et retravaillées par Claude [Masset \(1982\)](#). C'est sur cette collection de référence que se sont fondées, pendant vingt ans, la plupart des études anthropologiques et paléodémographiques francophones. Elle a été révisée et complétée dans les années 2004-2006 en ajoutant 200 individus de plus de 60 ans pour pallier le déficit en sujets âgés dont souffraient les collections ostéologiques

initiales et, d'un point de vue démographique, en corrigeant les biais les plus criants dans les déclarations d'âge comme le problème récurrent de l'attraction des âges ronds (Séguy et Buchet, 2011, 2013). Au final, plus de 1100 squelettes d'individus ayant vécu au XIXe siècle, et présentant les caractéristiques démographiques des populations préindustrielles, composent notre population de référence. Pour chacun (509 hommes et 612 femmes, âgés de 18 à 98 ans), l'état de la synostose crânienne a été relevé. Divers regroupements en classes d'âges sont utilisables. Pour les « stades de synostose » différents regroupements ont été envisagés : en sept stades (Masset, 1982, p. 171 et 178) ou en quatre stades (Bocquet-Appel et Masset, 1995) ; nous avons opté pour un regroupement en cinq stades, chacun correspondant peu ou prou à 20% de l'effectif global de l'échantillon de référence.

De cette brève présentation des données de référence nous retiendrons pour l'essentiel :

- la distribution marginale par colonnes ne correspond à aucune structure par âge « naturelle » ; on a vu que ce n'était pas gênant dans la mesure où seule la lecture en colonnes du tableau doit être envisagée ; au contraire, l'addition d'individus âgés (par exemple) est utile pour mieux estimer les probabilités conditionnelles correspondantes,
- le tableau final a été établi par plusieurs chercheurs : même si tous ont agi avec la plus grande rigueur, des points de vue légèrement différents ont pu conduire à des biais sensibles, par exemple dans la lecture des stades de synostose,
- une de ces collections de référence a été détruite (dans un incendie en 1978), si bien qu'il est impossible de revenir aux données brutes pour la moindre vérification, concernant par exemple certaines « corrections », apportées ou qui auraient dû l'être. On pourra certes reconstituer un échantillon de référence à partir d'autres collections ostéologiques, mais c'est un gros travail non encore entrepris à ce jour.

Pour les deux derniers points évoqués ci-dessus, il nous a paru utile d'étudier d'un point de vue statistique, non pas évidemment si le tableau de référence était correct, mais seulement s'il semblait cohérent. S'agissant d'une table de contingence provenant de la discrétisation de deux variables continues, nous avons ajusté un modèle d'association de Goodman (1986, 1991) défini par la condition :

$$p_{ij} = \exp \left( \gamma + \alpha_i + \beta_j + \sum_{k=1}^K \varphi_k \mu_{ik} \nu_{jk} \right)$$

où  $K$  est un entier positif donné (« dimension du modèle »), les  $\varphi_k$  sont des paramètres réels tels que  $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \dots \geq \varphi_K > 0$  et  $\gamma (> 0)$ ,  $\alpha_i (> 0)$ ,  $\beta_j (> 0)$ ,  $\mu_{ik}$ ,  $\nu_{jk}$  sont des paramètres réels vérifiant certaines conditions d'identifiabilité. Nous verrons que, pour l'étude des données de référence, la dimension  $K = 1$  est suffisante ; nous commenterons donc ce seul cas. (Remarquons seulement que  $K = 0$  correspond à l'indépendance des lignes et des colonnes).

Pour  $K = 1$ ,  $\alpha_i$  est un effet de ligne,  $\beta_j$  un effet de colonne,  $\varphi_1$  (noté ici  $\varphi$ ),  $\mu_{i1}$  (noté  $\mu_i$ ) et  $\nu_{j1}$  (noté  $\nu_j$ ) décrivent l'interaction lignes  $\times$  colonnes. L'identifiabilité des paramètres est assurée en choisissant un système de poids (positifs de somme un),  $r_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) pour les lignes,  $c_j$

( $j = 1, \dots, c$ ) pour les colonnes. On impose alors :

$$\begin{cases} \sum_i r_i \mu_i = \sum_j c_j \nu_j = 0 \\ \sum_i r_i \mu_i^2 = \sum_j c_j \nu_j^2 = 1 \\ \sum_i r_i \alpha_i = \sum_j c_j \beta_j = 0 \end{cases}$$

On utilisera ici les poids « naturels »  $r_i = \frac{n_{i+}}{n}$  et  $c_j = \frac{n_{+j}}{n}$ .

Il est intéressant d'interpréter le modèle en termes de loi continue sous-jacente. Supposons qu'à chaque stade (ligne) corresponde un score  $y$ , à chaque âge (colonne) un score  $x$ . Si  $x$  et  $y$  ont une distribution conjointe normale de marges réduites, de coefficient de corrélation  $\rho$ , et si les amplitudes des classes sont suffisamment petites ( $dx$  pour  $x$  et  $dy$  pour  $y$ ) on a :

$$p_{ij} \simeq \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right] dx dy,$$

que l'on peut comparer à :

$$p_{ij} = \exp(\gamma + \alpha_i + \beta_j + \varphi \mu_i \nu_j).$$

On voit alors que les  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_j$ ) ne dépendent que de la marge  $x$  (resp.  $y$ ), alors qu'apparaît la correspondance

$$\frac{\rho}{1-\rho^2} xy \leftrightarrow \varphi \mu_i \nu_j.$$

Puisque les scores  $x$  et  $y$  sont supposés réduits, et que les vecteurs  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) et  $\nu_j$  ( $j = 1, \dots, c$ ) le sont de même, compte tenu des pondérations adoptées, on voit que  $\mu_i$  correspond à la valeur de la variable normale sous-jacente  $x$  pour l'état osseux  $i$  tandis que  $\nu_j$  correspond à la valeur de la variable normale sous-jacente  $y$  pour la classes d'âge  $j$ . On a enfin :

$$\varphi \simeq \frac{\rho}{1-\rho^2},$$

soit

$$\rho \simeq \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\varphi^2}}{2\varphi}.$$

L'estimation de  $\varphi$  conduit donc à l'évaluation d'un coefficient de corrélation qui prend tout son sens dans le contexte gaussien approché, alors que l'on ne trouve dans la littérature que des « coefficients de corrélation » empiriques dont l'interprétation peut être sujette à caution.

Nous avons ajusté un modèle d'association de Goodman à diverses tables de données de référence. Les calculs ont été faits au moyen des programmes décrits dans [Aït-Sidi-Allal et al. \(2004\)](#) qui fournissent les estimations de maximum de vraisemblance des divers paramètres, leurs variances asymptotiques, un test d'adéquation (chi-deux, rapport de vraisemblance) et la valeur des critères AIC et BIC pour diverses dimensions  $K$ . Dans tous nos exemples, le modèle s'ajuste bien en dimension 1 (test du chi-deux aux niveaux usuels) ; lorsque plusieurs valeurs de  $K$  sont comparées,  $K = 1$  est le meilleur choix avec les deux critères considérés. Les analyses qui suivent seront donc présentées pour cette seule valeur de  $K$ .

Nous avons vu précédemment (Séguy *et al.*, 2013) que, bien que l'objectif puisse paraître ambitieux, il semblait raisonnable de travailler sur 11 classes d'âges quinquennales de 25 à 80 ans encadrées d'une classe « 18-24 » ans et d'une classe « 80 ans ou plus ». Si nous ajustons le modèle de Goodman à l'ordre 1 au tableau des données de référence correspondant sexes réunis (Annexe A), nous obtenons une bonne adéquation avec un rapport de vraisemblance égal à 26,363 pour 33 degrés de liberté. Par ailleurs les critères de choix usuels conduisent à l'ordre 1 avec des valeurs croissantes pour les ordres de 1 à 4 (successivement 398, 424, 445, 463 pour AIC et 474, 567, 645, 709 pour BIC). Les paramètres utiles sont alors estimés comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi &= 0.760 \text{ d'où } \rho = 0.539, \\ \mu &= (-1.360, -0.221, 0.440, 0.992, 1.335), \\ \nu &= (-1.738, -1.060, -0.565, -0.422, -0.387, -0.344, 0.184, 0.220, 0.834, \\ &\quad \underline{1.200}, \underline{1.044}, \underline{0.970}, 1.465).\end{aligned}$$

Pour les sutures exocrâniennes, le coefficient de corrélation de 0.56 donné par (Séguy et Buchet, 2011, p. 58, tableau 1) est très voisin de la présente estimation et se trouve donc conforté (ce qui ne change pas nos réticences au sujet d'autres valeurs du tableau cité). Les valeurs estimées pour les  $\mu_i$  ne demandent pas de commentaire particulier, si ce n'est qu'elles sont croissantes, comme on devait s'y attendre ; en revanche, la suite des  $\nu_j$  n'est pas croissante (valeurs soulignées) ce qui semble incohérent. Cependant les décroissances observées sont compatibles avec les erreurs d'échantillonnage, les écarts-types d'échantillonnage étant en effet

$$(0.117, 0.139, 0.139, 0.147, 0.148, 0.143, 0.151, 0.153, 0.193, 0.181, 0.198, 0.198, 0.154)$$

tous supérieurs à 0,1 et même proches de 0,2 dans la zone « douteuse ».

Nous avons aussi ajusté un modèle d'association de Goodman au tableau de référence obtenu à partir du précédent en regroupant les classes centrales deux par deux, c'est-à-dire en considérant 5 classes d'âge décennales « 25-34 ans », ..., « 65-74 ans » encadrées par une classe « 18-24 ans » et une classes « 75 ans ou plus ». Nous avons obtenu les estimations :

$$\begin{aligned}\varphi &= 0.723 \text{ d'où } \rho = 0.524, \\ \mu &= (-1.360, -0.230, 0.475, 0.964, 1.341), \\ \nu &= (-1.780, -0.810, -0.440, -0.092, 0.490, 1.175, 1.309).\end{aligned}$$

On voit que, par rapport à la subdivision en 13 classes d'âge, les valeurs de  $\varphi$  et de  $\mu$  sont très peu changées, ce qui est tout à fait cohérent, et la suite des  $\nu_j$  est maintenant strictement croissante, les regroupements de classe ayant sans doute eu deux effets positifs complémentaires sur les colonnes voisines du tableau : « niveler » les distributions et augmenter les sommes, c'est-à-dire la taille des échantillons ; notons que les écarts types des estimateurs des  $\nu_i$  sont maintenant

$$(0.015, 0.010, 0.013, 0.012, 0.015, 0.017, 0.012),$$

donc plus faibles comme on pouvait s'y attendre et un peu mieux équilibrés d'une classe d'âge à l'autre.

L'examen de ces divers résultats conduit à conclure que le tableau des données de référence pour 13 classes d'âge (et cinq stades osseux) est relativement cohérent et que, si problème il y a,



c'est au niveau des âges les plus élevés, au-delà de 60 ans ; c'est pour ces âges-là que des additifs récents ont été faits afin d'augmenter les effectifs des échantillons (voir ci-dessus la présentation de la construction du tableau de référence) ; faut-il revoir ces additifs ? Ne sont-ils pas simplement encore insuffisants (on a entre 60 et 80 ans les effectifs les plus faibles) ?

En pratique, comme la méthode d'estimation que nous proposons dans la section suivante tient compte des erreurs d'échantillonnage sur les données de référence, on peut penser que l'utilisation de ces dernières en leur état actuel ne saurait conduire à des biais majeurs. Avec un découpage en 13 classes d'âge, il faudra seulement se rappeler que l'estimation des probabilités de décès peut être moins fiable pour les classes d'âge élevé, disons entre 60 et 80 ans, s'il s'agit de différencier des classes voisines ; mais un regroupement général systématique risquerait de masquer des différences intéressantes entre profils de mortalité des plus jeunes. Nous poursuivrons donc l'analyse avec 13 classes d'âge, en accord avec nos propositions antérieures, mais avec en tête les précautions que nous venons de mettre en relief.

Par ailleurs des tableaux de référence par sexe ont été proposés pour utilisation avec des restes osseux dont on a pu déterminer le sexe. Pour ces tableaux, le modèle d'association de Goodman avec 13 classes d'âge donne les résultats suivants.

### Femmes

$$\begin{aligned}\varphi &= 0.774 \text{ d'où } \rho = 0.545, \\ \mu &= (-1.263, -0.197, 0.398, 0.741, 1.596) \\ \nu &= (-1.504, -1.560, -0.276, -0.323, -0.461, -0.4881, 0.136, 0.550, \\ &\quad 0.890, 1.075, 1.000, 0.931, 1.423).\end{aligned}$$

### Hommes

$$\begin{aligned}\varphi &= 1.267 \text{ d'où } \rho = 0.680, \\ \mu &= (-1.544, 0.248, 0.572, 0.754, 0.971) \\ \nu &= (-1.293, -0.724, -0.613, -0.540, -0.507, -0.256, 0.122, -0.335, \\ &\quad 0.334, 0.279, \underline{2.502}, 0.552, 1.656).\end{aligned}$$

Pour les deux cas, la croissance de la suite des  $\nu_i$  est beaucoup plus perturbée que pour les sexes réunis. En dehors des nombreuses et importantes inversions, on peut noter le 2.502 (souligné) chez les hommes (assorti d'un écart-type très élevé de 1.165). Le coefficient de corrélation est aussi très élevé chez les hommes, avec un écart-type important. En fait, ces deux tableaux pâtissent d'effectifs faibles (d'autant inférieurs à ceux du tableau sexes réunis que ce dernier a pu prendre en compte les sujets dont le sexe ne pouvait pas être déterminé). Nous avons comparé ces deux tableaux en testant l'homogénéité des 13 couples de colonnes correspondantes au moyen d'un simple chi-deux, et avons obtenu 48.15 pour 52 ddl, soit une probabilité de dépassement (P-value) de 0.63. Il nous semble donc illusoire à ce stade de différencier les deux distributions de référence, et au contraire préférable d'utiliser seulement les références sexes réunis, même pour estimer une structure par âges au décès pour une population de sexe déterminé. C'est ce que nous avons fait, par exemple, dans [Séguy et al. \(2013\)](#).

## 4. Estimation de la structure par âges

### 4.1. Bref rappel historique

On pourra voir [Caussinus et Courgeau \(2010\)](#) ou [Séguy et Buchet \(2011, 2013\)](#) pour une revue de la littérature que l'on peut résumer ainsi : les données de référence et les données de site permettant d'estimer respectivement les paramètres  $p_{i/j}$  et  $\pi_i$ , il semble qu'une estimation des  $p_j$  puisse être facilement tirée de la relation (1) pour  $c \leq r$ , mais il n'en est rien (voir annexe E). De même, pour  $c \geq r$ , on peut introduire un modèle de mortalité pour les  $p_j$  (par exemple le modèle de Gompertz ou celui de Weibull qui expriment les  $p_j$  au moyen de seulement deux paramètres) sans obtenir de bons résultats ([Séguy et al., 2013](#) et annexe E). La faible taille des échantillons observés sur site et l'instabilité intrinsèque du modèle (1) semblent à l'origine des difficultés. Nous avons essayé de les tourner avec une méthode bayésienne [Robert \(2006\)](#) dont nous allons d'abord exposer les grandes lignes pour voir ensuite comment la rendre aussi performante que possible au moyen d'un choix raisonné de la loi a priori.

### 4.2. Principe de la méthode

Il est naturel de considérer que les fréquences  $m_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) trouvées sur le site pour les divers stades, sont les valeurs observées d'une distribution multinomiale dont les paramètres  $\pi_i$  sont liés aux  $p_j$  et aux  $p_{i/j}$  selon le système (1).

Soit  $P$  la matrice des  $p_{i/j}$  et  $p$  le vecteur des  $p_j$ ,  $G$  la densité a priori de  $P$  et  $g$  celle de  $p$ ,  $P$  et  $p$  étant supposés indépendants, la densité conjointe de  $(M, P, p)$  sera alors  $f$  donnée par :

$$f(M, P, p) = g(p)G(P) \frac{m!}{\prod_i m_i!} \prod_i \left( \sum_j p_j p_{i/j} \right)^{m_i},$$

où l'indice  $i$  va toujours de 1 à  $r$  et l'indice  $j$  de 1 à  $c$ .

La densité conditionnelle de  $p$  sachant  $M$ , c'est-à-dire la densité a posteriori des  $p_j$  ( $j = 1, \dots, c$ ) est donc :

$$\frac{\int f(M, P, p) dP}{\int \int f(M, P, p) dp dP},$$

les intégrales étant prises sur les domaines de variation de  $p$  (resp.  $P$ ), un simplexe (resp. un produit de simplexes).

L'espérance conditionnelle à  $M$  d'une fonction  $\varphi$  de  $p$  est donnée par

$$\frac{\int \varphi(p) f(M, P, p) dP}{\int \int f(M, P, p) dp dP} = \frac{E(\varphi(p) \prod_i (\sum_j p_j p_{i/j})^{m_i})}{E(\prod_i (\sum_j p_j p_{i/j})^{m_i})}, \quad (3)$$

les espérances étant prises pour  $p$  et  $P$  indépendants de densités respectives  $g$  et  $G$ .

Des choix convenables de  $\varphi$  conduisent à diverses fonctions de la loi a posteriori : moyenne, fonction de répartition (d'où intervalles de crédibilité) d'un  $p_j$ , etc. Rappelons qu'un intervalle de crédibilité à  $q\%$  est un intervalle de probabilité a posteriori égale à  $q$  (c'est le correspondant bayésien de l'intervalle de confiance de la statistique fréquentiste) ; en pratique nous donnerons

l'intervalle  $[a, b]$  tel que la fonction de répartition a posteriori soit respectivement  $\frac{1-q}{2}$  au point  $a$  et  $1 - \frac{1-q}{2}$  au point  $b$ .

Les intégrales de la formule (3) peuvent être évaluées aisément par une méthode de Monte Carlo. Pour  $s = 1, \dots, S$  notons  $p_s$  et  $P_s$  des vecteurs aléatoires indépendants respectivement de densités  $g$  et  $G$ . L'expression (3) sera approchée par :

$$\frac{\sum_{s=1}^S \varphi(p_s) \prod_i (\sum_j p_{js} P_{ijs})^{m_i}}{\sum_{s=1}^S \prod_i (\sum_j p_{js} P_{ijs})^{m_i}}.$$

Notons que tous les calculs relatifs aux  $p_j$  peuvent être faits pour diverses fonctions de ces paramètres comme, par exemple, les probabilités cumulées de décès ( $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots$ ) ou les probabilités de décès au-delà d'un certain âge ( $1 - p_1, 1 - p_1 - p_2, 1 - p_1 - p_2 - p_3, \dots$ ), c'est-à-dire les probabilités de survie au-delà de certains âges pour un sujet adulte (ayant atteint 18 ans).

### 4.3. Choix de la loi a priori

Pour la densité  $G$ , nous partirons d'une estimation bayésienne de  $P$  à partir du tableau des données de référence. On peut admettre que ses colonnes ont approximativement une distribution multinomiale ; comme aucune autre information n'est disponible sur les paramètres  $p_{i/j}$ , on leur affectera une loi a priori uniforme sur le simplexe correspondant. La loi a posteriori de  $P$  est alors le produit de  $c$  lois de Dirichlet, chacune de paramètres  $\alpha_{ij} = n_{ij} + 1$  ( $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, c$ ). C'est cette loi qui deviendra la loi a priori  $G$  de  $P$  pour le problème traité ici. Dans celui-ci, on peut calculer la nouvelle loi a posteriori de  $P$  ; nous ne le ferons pas dans les exemples qui suivent car il ne s'agit pas là du paramètre d'intérêt, mais il peut être intéressant de mentionner incidemment que cette loi est extrêmement proche de la loi de Dirichlet a priori ce qui correspond au fait que les données de site ne contiennent pas d'information sur les probabilités conditionnelles  $p_{i/j}$ .

Le choix de  $g$  est plus délicat. Nous savons pour cela que  $p$  caractérise une certaine loi de mortalité. [Séguy et Buchet \(2011, 2013\)](#) ont considéré une série de 167 lois de mortalité, observées dans des populations qui, n'ayant pas achevé leur transition démographique, se caractérisent par de hauts niveaux de fécondité et une importante mortalité des moins de 5 ans. Le « standard préindustriel » est défini comme la moyenne de ces lois. Dans un premier temps ([Caussinus et Courgeau, 2010, 2011](#)) nous avons proposé une loi a priori de Dirichlet dont les moyennes correspondent à ce standard préindustriel et dont la somme des paramètres est égale à  $c$  (ce dernier choix a été conforté empiriquement par simulation et sur divers exemples, mais peut aussi s'expliquer si la seule information apportée par les paléodémographes est celle du standard, la dispersion choisie pour la loi a priori étant alors du même ordre que celle de la loi uniforme). Un des intérêts majeurs d'une loi a priori dont la moyenne est le standard est que les résultats de l'analyse s'expriment alors en termes d'éloignement ou non du standard, c'est-à-dire du caractère plus ou moins atypique du site considéré. Il est possible cependant qu'une réflexion plus poussée sur la nature du problème permette d'améliorer le choix de cette loi a priori  $g$  au-delà de la considération de sa seule moyenne. Nous reprendrons cette question après avoir présenté quelques exemples concrets.

## 5. Quelques exemples

Nous illustrerons notre propos par la considération de trois sites.

**Antibes.** À partir d'une fouille préventive, menée en 1998 sur l'emplacement de l'ancien cimetière de la ville d'Antibes, on a pu déterminer l'âge biologique au décès de 73 squelettes d'adultes. Parallèlement à l'analyse anthropologique, une étude démographique a été effectuée sur les données d'état civil de la population d'Antibes à cette époque (Buchet et Séguy, 2003; Buchet *et al.*, 2003). Nous disposons ainsi de la structure par âges de la population vivante (totalité) et de la population décédée (au travers de l'échantillon qui a pu être observé) : voir Annexe B. Bien entendu, la méthode statistique étudiée ici est faite pour les situations où aucun registre n'est disponible ; mais, la comparaison aux registres des résultats fournis par l'analyse statistique des données anthropologiques pourra contribuer à évaluer l'efficacité de notre méthode dans la mesure où cette population peut encore être considérée comme ayant vécu dans le contexte préindustriel.

**Frénouville.** La nécropole rurale de Frénouville (Calvados) a livré 650 sépultures datées de la fin du III<sup>e</sup> à la fin du VII<sup>e</sup> siècle, qui se répartissent en deux grandes phases : une période gallo-romaine, jusqu'au milieu du Ve siècle (tombes orientées nord-sud) puis une période mérovingienne (tombes orientées est-ouest) (Buchet, 1978; Pilet, 1980; Séguy et Buchet, 2011, 2013). On a pu évaluer l'âge biologique de 69 Gallo-Romains et 200 Mérovingiens adultes. Ces évaluations sont fournies dans l'annexe C.

**Lisieux.** Une grande zone funéraire, découverte fortuitement à 250 m du castrum antique de Lisieux (Calvados), a fait l'objet d'une fouille exhaustive au début des années 1990. Elle a livré plus de 1 000 squelettes répartis en deux ensembles distincts datés du Bas-Empire et du haut Moyen Âge (Paillard *et al.*, 2006; Séguy et Buchet, 2011, 2013). Pour la première de ces périodes (IV<sup>e</sup> siècle) on a pu relever l'âge biologique au décès de 458 individus, répartis en 4 sous périodes de 25 ans (annexe D).

Nous avons considéré les deux premiers de ces sites sous plusieurs aspects dans des études antérieures (en particulier Séguy *et al.*, 2013). Celles-ci ont permis de montrer l'intérêt de la méthode proposée par rapport aux autres approches. Elles ont aussi montré qu'une division des âges en 13 classes quinquennales encadrées par une première classe « 18-24 » ans et une dernière classe «  $\geq 80$  ans » était satisfaisante. C'est la subdivision que nous adopterons donc ici.

Pour Antibes, les probabilités de décès dans chaque tranche d'âge estimées par la moyenne de la loi a posteriori sont données dans le tableau 1 et montrées dans la figure 2 assorties des intervalles de crédibilité à 50% et 90%. Elles sont très proches des valeurs obtenues par les registres (Annexe B), en tous cas tout à fait compatibles avec ces dernières pour un échantillon de seulement 73 individus. Ce petit nombre est certes responsable de l'amplitude des intervalles de crédibilité, on peut cependant se demander si un choix plus approprié de la loi a priori ne permettrait pas de la réduire.

Le site de Frénouville est intéressant à plusieurs égards, en particulier par l'existence de deux périodes à un moment charnière de l'histoire. Grandes épidémies, guerres et fléaux naturels (pluies diluviennes, tremblements de terre...), mouvements de populations, ont marqué les premiers siècles du Moyen Âge. L'analyse paléodémographique peut chercher à confirmer et préciser cette crise

TABLEAU 1. Site d'Antibes, probabilités estimées à partir des âges osseux.

Groupes d'âges	18-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	≥ 80
Probabilités estimées	0.096	0.069	0.061	0.056	0.060	0.072	0.075	0.080	0.093	0.095	0,09	0.078	0.075

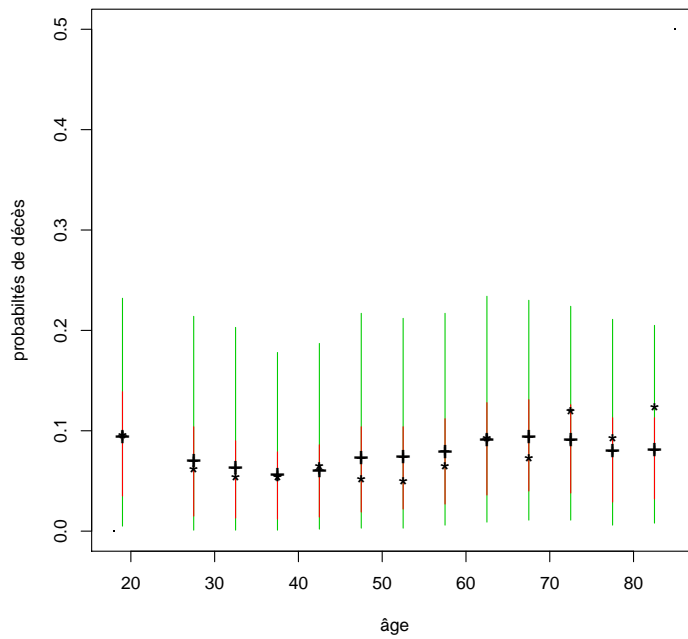


FIGURE 2: Antibes. Pour chaque classe d'âge, estimation ponctuelle de la probabilité de décès (+), intervalles de crédibilité à 50% (rouge) et 90% (vert), fréquence des décès selon les registres (\*).

en comparant la mortalité des deux périodes considérées (comparaison d'autant plus légitime que la fouille des deux ensembles a été menée par la même équipe et le codage des synostoses effectué par la même personne). On a obtenu les estimations du tableau 2 suivant, accompagnées d'intervalles de crédibilité dans la figure 3a pour les probabilités des classes d'âge et dans la figure 3b pour les probabilités de survie.

TABLEAU 2. Estimation (moyenne de la distribution a posteriori) des probabilités de décès par classes d'âges pour Frénoeuville, époque mérovingienne (M) et époque gallo-romaine (GR).

Groupes d'âges	18–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49	50–54	55–59	60–64	65–69	70–74	75–79	≥ 80
M	.361	.071	.055	.032	.032	.042	.040	.047	.056	.085	.061	.048	.069
GR	.090	.070	.060	.050	.055	.071	.067	.079	.086	.107	.097	.078	.091

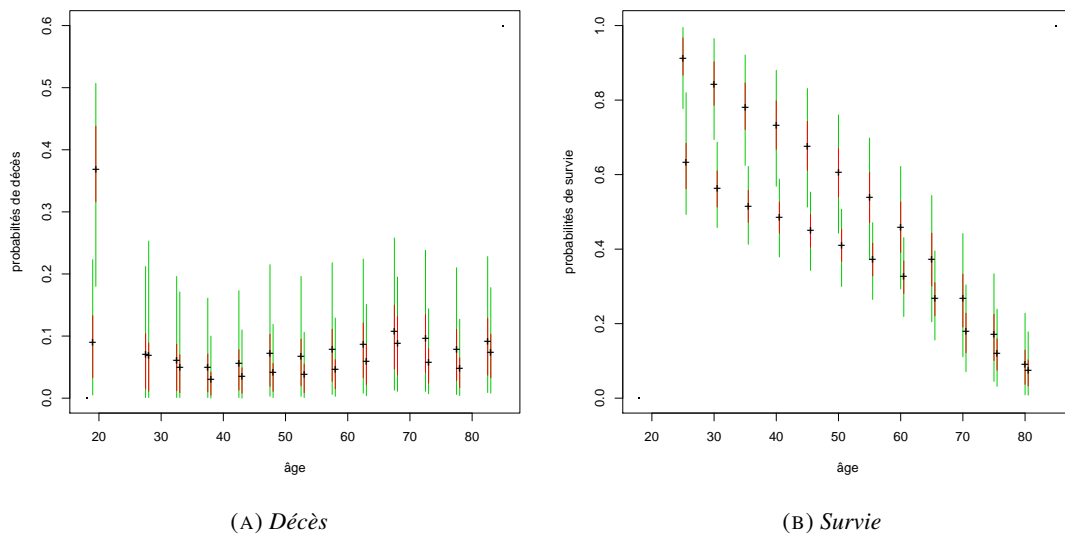


FIGURE 3: Probabilités de décès (a) et de survie (b) avec intervalles de crédibilité à 50% (rouge) et 90% (vert) pour la période gallo-romaine et la période mérovingienne (décalée sur la droite).

Alors que l'estimation de la mortalité est proche du standard (0.063 0.050 0.052 0.056 0.060 0.065 0.073 0.085 0.097 0.106 0.108 0.088 0.096) à l'époque gallo-romaine, elle s'envole littéralement chez les jeunes à l'époque mérovingienne, en particulier si l'on examine les probabilités de survie, une telle situation ne saurait être pérenne car elle conduirait à l'extinction de la population en l'absence de migrations. Néanmoins, pour une conclusion ferme, on aurait souhaité des intervalles de crédibilité plus resserrés. Nous examinons dans la section suivante s'il est possible d'améliorer la méthode statistique pour cela.

## 6. Retour sur la loi a priori des $p_j$

La loi a priori de Dirichlet précédemment choisie consiste, en gros, à modifier la loi uniforme exprimant l'absence d'information a priori en ne retenant que la valeur moyenne d'une famille de 167 lois de mortalité observées. On peut cependant penser légitime de tirer plus qu'une moyenne de cette famille de lois de mortalité. Si celle-ci donne une base pour les lois de mortalité possibles, la loi a priori « naturelle » sera la loi uniforme sur cette famille. Or, chacune de ces lois traduit, en termes de probabilité de décès à un âge donné, des observations structurées dans une table de mortalité en fonction des quotients de mortalité par âge valables à l'époque. Elles représentent donc un ensemble de situations démographiques « normales », susceptibles de perdurer, dans lesquelles le comportement de la population en termes de mortalité par âge est proche des conditions biologiques (naturelles) d'extinction d'une génération. Elles ne peuvent pas représenter la mortalité par âge d'une population soumise à une épidémie, à une guerre, ou à quelque autre circonstance plus ou moins ponctuelle qui verrait un quotient de mortalité « anormal » à certains âges. Or, dans une recherche historique, il serait regrettable que l'on ne puisse pas découvrir de telles situations « anormales ». En fait, si nous prenons comme a priori la loi uniforme (ou d'ailleurs n'importe quelle autre loi) sur cette famille de 167 tables de mortalité, la loi a posteriori sera une repondération de celles-ci de sorte que l'estimation obtenue sera nécessairement à l'intérieur de leur enveloppe. On peut illustrer la difficulté par le cas du site de Frénoville, époque mérovingienne. La figure 4 montre les densités a posteriori de  $p_1$  et  $p_2$  obtenues avec la loi de Dirichlet définie plus haut et la plage des valeurs observées pour ces paramètres dans les 167 lois compilées ; on voit que, si ces valeurs correspondent à des probabilités a posteriori « raisonnables » pour  $p_2$ , elles sont très peu probables pour  $p_1$  (inférieures au quantile à 5%) ; l'estimation faite plus haut est donc très supérieure à tout ce qui peut être obtenu avec une loi a priori sur les 167 tables. On retrouve le problème pour l'estimation des probabilités de plusieurs autres classes d'âge comme représenté sur la figure 5 qui compare les estimations obtenues respectivement avec la loi a priori de Dirichlet et avec la loi uniforme définie ici ; sont aussi portés les intervalles dans lesquels sont comprises les valeurs des lois de mortalité « normales » et celle de ces lois qui est la plus proche de l'estimation effectuée avec la loi a priori sur les 167 tables discutée ici (« la plus proche » peut s'entendre de différentes manières : on a utilisé ici la distance  $L_2$  et la « distance » de Kullback, qui conduisent au même résultat).

En revanche, sur un site présentant un profil « normal », les deux lois a priori conduisent à des estimations ponctuelles voisines, et la seconde de ces lois fournit des intervalles de crédibilité plus courts comme on pouvait s'y attendre. Le site d'Antibes en donne un exemple (Figure 6). On pourrait seulement se demander si ces intervalles ne sont pas trop optimistes dans la mesure où ils suggèrent une loi de mortalité légèrement différente de celle qui ressort des registres au niveau des âges intermédiaires.

Il était légitime maintenant de se poser la question : un mélange des deux lois a priori précédemment discutées conviendrait-il pour exprimer que les mortalités à estimer sont justement un mélange de mortalités « normales » et de mortalités exceptionnelles ? Il a fallu se rendre à l'évidence que cette solution, assez loin de présenter les avantages de chacune des précédentes, en cumulait plutôt les inconvénients.

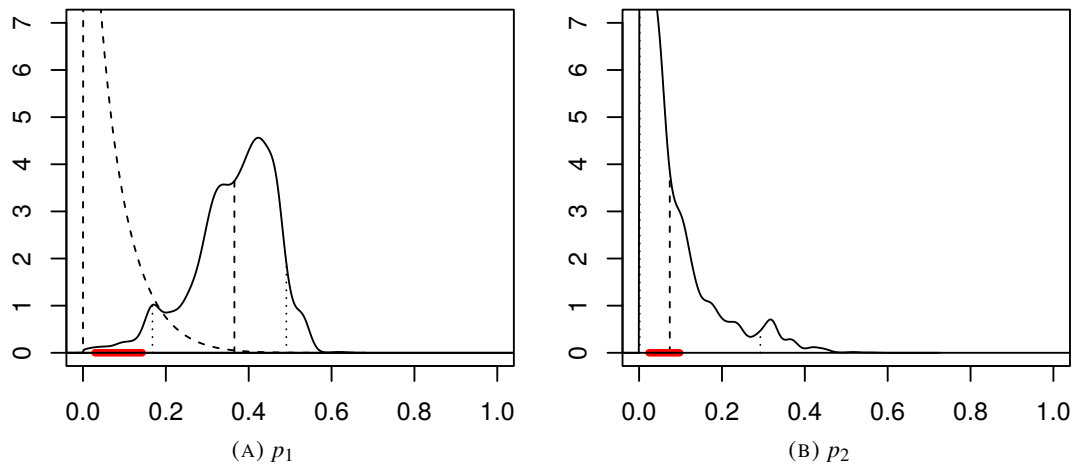


FIGURE 4: Frénoville époque mérovingienne : densités a posteriori de  $p_1$  (à gauche) et  $p_2$  (à droite) avec quantiles 5%, 50%, 95% (traits verticaux pointillés) et plage des valeurs observées dans les 167 tables de mortalité de base (trait gras rouge). (La courbe tirée à gauche représente la densité a priori de  $p_1$ .)

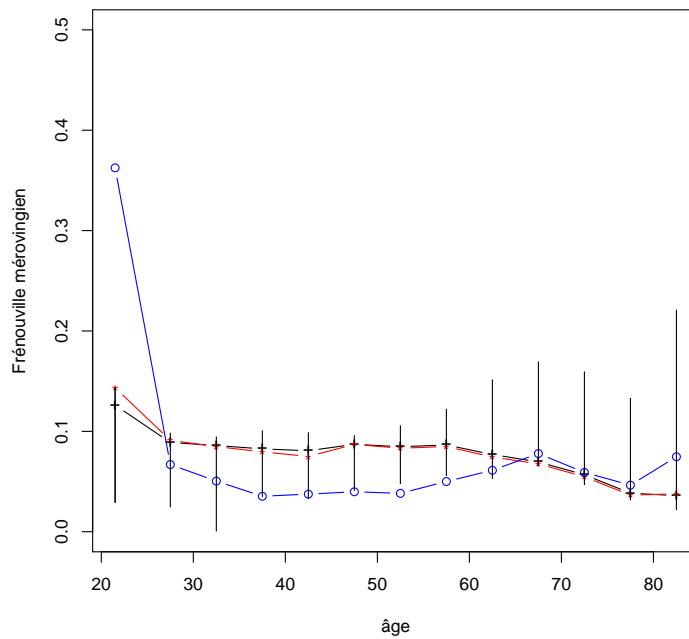


FIGURE 5: Frénoville époque mérovingienne, estimation des 13 probabilités de décès à partir de deux lois a priori : Dirichlet en bleu et uniforme sur 167 tables en noir. Les traits verticaux noirs donnent les intervalles dans lesquels se trouvent les diverses probabilités de décès pour les 167 lois de mortalité de base ; celle de ces lois « la plus proche » de l'estimation est figurée en rouge.



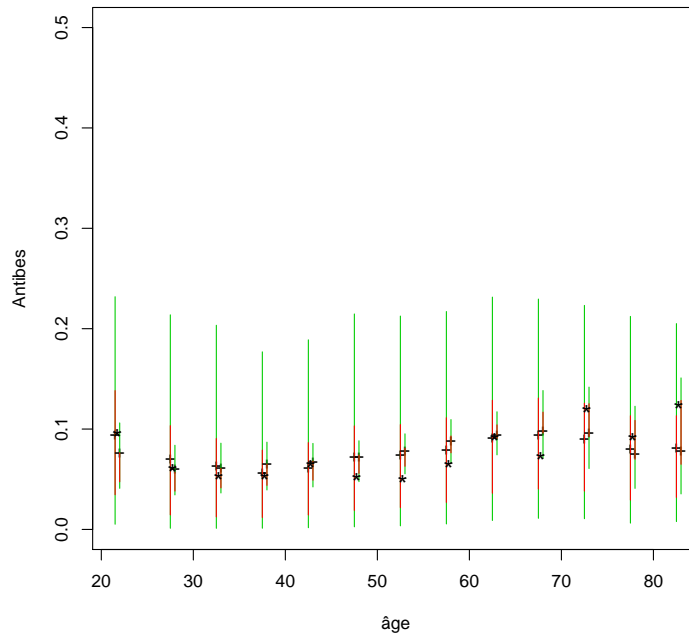


FIGURE 6: Antibes, estimation des 13 probabilités de décès (+) à partir de deux lois a priori, Dirichlet et uniforme sur 167 tables (décalée sur la droite). Les traits verticaux donnent les intervalles de crédibilité à 50% (rouge) et 90% (vert). Les astérisques marquent les valeurs des registres.

Ayant utilisé une information sur les moyennes des probabilités attendues, puis ayant échoué d'une certaine façon à introduire quelque information sur les dispersions, cherchons ce que l'on sait a priori sur les corrélations entre les probabilités  $p_j$ . Sur les 167 lois compilées envisagées plus haut, les coefficients de corrélation empiriques entre les probabilités de classes voisines sont très élevés (par exemple, entre la classe 25-29 ans et les classes 18-24, 30-34 et 35-39 ans, ils valent respectivement 0.890, 0.865 et 0.779). En fait, sans être démographe, il semble clair que la probabilité de décès ne saurait varier trop brutalement d'une classe à une classe voisine, ne serait-ce qu'à cause du caractère arbitraire des limites de classe. Et cela même pour une loi de mortalité exceptionnelle, sauf cas très particulier. Cette idée est exprimée de diverses façons dans les « modèles adaptés aux populations préindustrielles » (titre du chapitre VI de [Séguy et Buchet, 2011](#)) qui cherchent à relier entre eux les taux de mortalité des différentes classes d'âge. Ce type de continuité suggère un lissage des probabilités des classes d'âge. Celui-ci a été réalisé en choisissant la loi a priori de la façon suivante :

- on part pour les  $p_j$  d'une loi de Dirichlet de paramètres  $\beta_j$  ( $j = 1, \dots, c$ ),
- on effectue ensuite une moyenne mobile pour « lisser » ces valeurs.

Les paramètres  $\beta_j$  sont choisis de sorte que

- après lissage, les moyennes a priori des diverses classes soient encore égales au standard préindustriel,
- la somme des  $\beta_j$  soit encore égale à  $c$  pour conserver l'ordre de grandeur de la dispersion de la loi de Dirichlet proposée précédemment.

Les pondérations intervenant dans la moyenne mobile sont proposées sur des bases empiriques

(et une réflexion plus fondamentale sera utile, voire nécessaire). Elles dépendent évidemment de l'amplitude des classes d'âge et ne prennent tout leur sens que pour un nombre de classes relativement élevé. Dans ce qui suit, avec nos 13 classes, nous avons utilisé un lissage sur six classes voisines de la classe centrale, avec les poids  $w, v, u, 1 - 2(u + v + w), u, v, w$  où  $u = .2, v = .1, w = .05$  (les problèmes de bord ont été traités en reportant le poids des classes manquantes sur la classe « centrale »). Pour ces choix, nous nous sommes essentiellement fondés sur l'examen des corrélations observées sur les 167 lois de mortalité considérées. A quelques exceptions près, la corrélation est très élevée pour des classes contiguës, puis décroît avec l'éloignement, devenant négligeable pour un éloignement supérieur à 15 ans (plus de trois classes). A titre d'exemple, ces corrélations sont (0.89 1.00 0.86 0.78 0.65) autour de la seconde classe (25-29 ans), elles sont (0.65 0.70 0.79 1.00 0.79 0.68 0.41) autour de la cinquième et (-0.04 0.19 0.20 1.00 0.56 0.37 0.13) autour de la neuvième (noter qu'une corrélation de -0.04 n'est pas « vraiment » négative compte tenu du fait que la somme des probabilités est égale à un, ce qui entraîne des corrélations négatives « naturelles » de l'ordre de 0.1). Pour quelques jeux de coefficients  $(u, v, w)$  nous avons comparé la distribution a priori correspondante à celle des 167 tables de base.

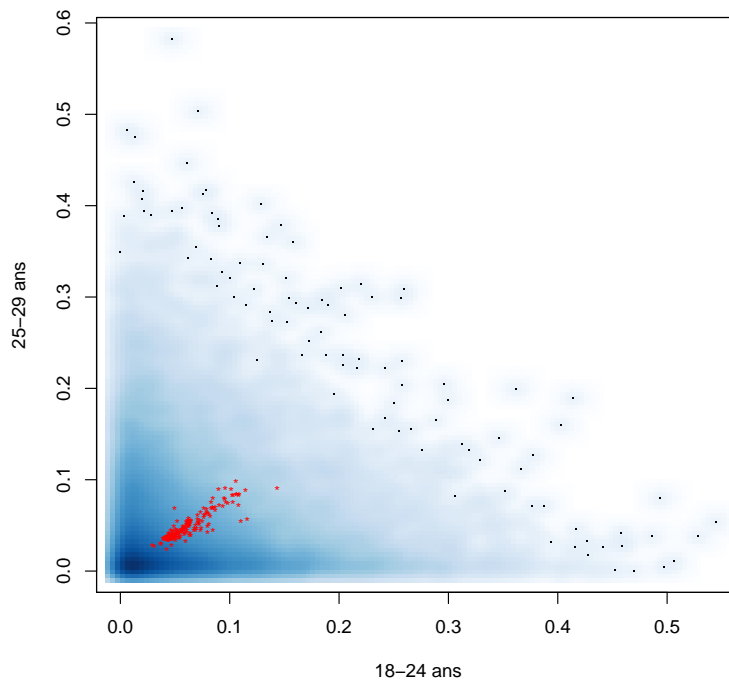


FIGURE 7: Densité conjointe de  $p_1$  et  $p_2$  avec la loi a priori de Dirichlet « ordinaire » (nuage bleu dont la couleur est d'autant plus foncée que la densité est plus grande) et valeurs de ces probabilités pour les 167 lois de base (points rouges).

Les figures 7 et 8 visent à illustrer l'effet de notre approche sur le couple de classes d'âge voisines « 18-24 » et 25-29 » ans. Dans les deux figures, la dispersion de la loi a priori (nuage bleu) est très supérieure à celle des 167 lois compilées (points rouges). Mais, au-delà de cet aspect, on voit que la loi de Dirichlet « ordinaire » est peu compatible avec la corrélation attendue

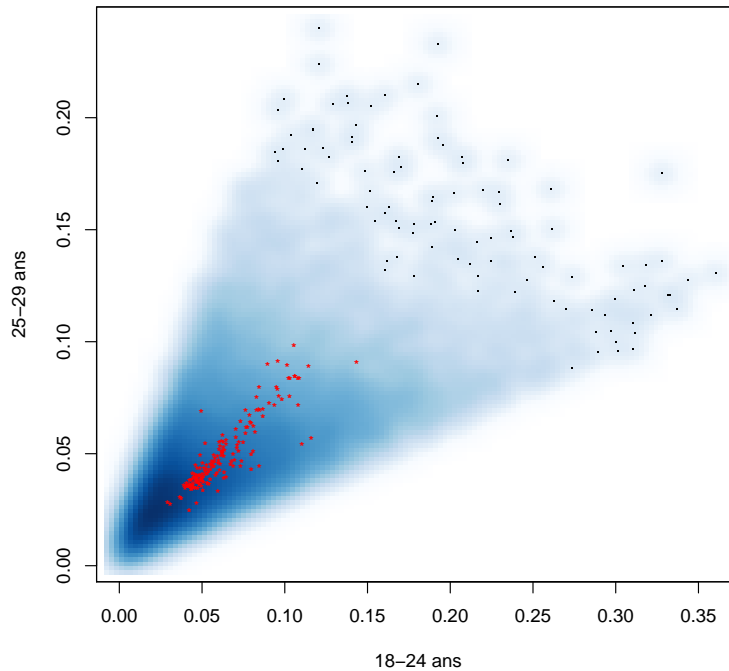


FIGURE 8: Densité conjointe de  $p_1$  et  $p_2$  avec la loi a priori de Dirichlet « lissée » (nuage bleu dont la couleur est d'autant plus foncée que la densité est plus grande) et valeurs de ces probabilités pour les 167 lois de base (points rouges).

puisque l'essentiel de la masse (bleu sombre) est dans des régions où aucune des lois observées ne figure ; en revanche, la loi lissée, tout en conservant un caractère beaucoup plus dispersé, est plus cohérente avec ces 167 types de mortalité « normales » : en un sens, on peut dire qu'elle en représente une extension (au sens de la dispersion) naturelle.

Si l'on utilise cette nouvelle loi a priori pour l'analyse du site d'Antibes, on obtient des estimations ponctuelles (moyennes a posteriori) très proches de celles qui sont obtenues plus haut avec la loi de Dirichlet, mais les intervalles de crédibilité sont maintenant plus courts (figure 9) ; malgré une légère surmortalité estimée pour les âges moyens compensée par la sous-mortalité des âges élevés, les estimations paraissent tout à fait compatibles avec les valeurs des registres ; elles pourraient cependant orienter vers une critique de l'échantillonnage qu'il serait intéressant de discuter.

Pour le site de Frénoville, époque mérovingienne, la nouvelle estimation est comparée à l'ancienne dans la figure 10. Les intervalles de crédibilité sont maintenant plus courts et on note un lissage, que l'on pouvait prévoir, des probabilités des classes les plus jeunes. Sur le fond, l'interprétation historique ne change pas mais la répartition de la surmortalité sur deux ou trois classes semble plus cohérente avec les comportements démographiques usuels.

Remarquons que le phénomène de lissage observé est d'une certaine façon en germe dans le premier type d'estimation (a priori de Dirichlet « ordinaire »). Examinons en effet la distribution a posteriori conjointe des probabilités des deux premières classes d'âge ; le coefficient de corrélation

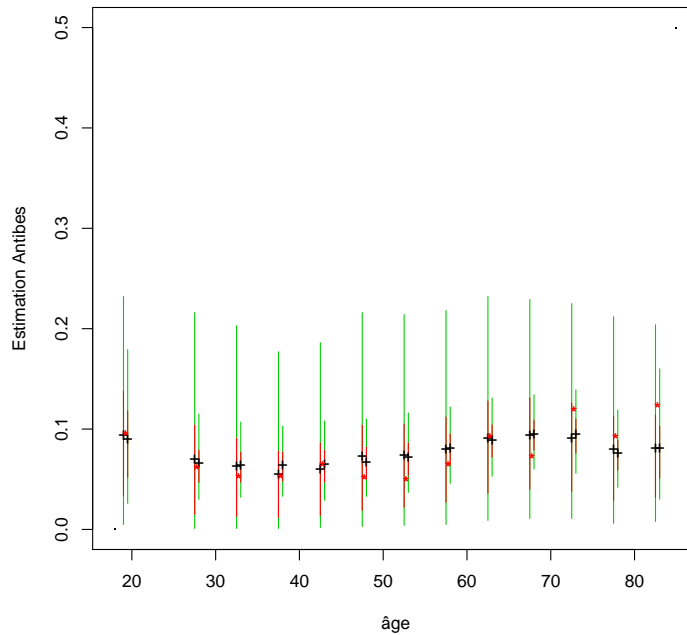


FIGURE 9: Antibes, estimation des 13 probabilités de décès (+) à partir de deux lois a priori, Dirichlet « ordinaire » et « lissée » (décalée sur la droite). Les traits verticaux donnent les intervalles de crédibilité à 50% (rouge) et 90% (vert). Les astérisques marquent les valeurs des registres.

vaut  $-0,707$ , corrélation négative importante montrant que, dans la marge de variation a posteriori de  $p_1$  il est tout à fait possible que ce dernier diminue alors que  $p_2$  augmenterait (voir aussi figure 3b les légères « bosses » sur les densités a posteriori de  $p_1$  et  $p_2$ , respectivement pour des plus petites et des plus grandes valeurs de ces paramètres, suggérant une diminution possible du premier au bénéfice du second). Au contraire, dans l'estimation avec la seconde loi a priori, le coefficient de corrélation a posteriori entre  $p_1$  et  $p_2$  est petit ( $0.123$ ) montrant que les incertitudes sur ces deux paramètres sont à peu près indépendantes. Cette caractéristique, retrouvée sur tous les exemples traités, constitue encore un argument supplémentaire en faveur de la seconde loi a priori.

La discussion ci-dessus nous incite à préconiser une « loi de Dirichlet lissée » comme loi a priori des  $p_j$ . D'autant que les autres sites que nous avons traités confortent ce point de vue.

C'est avec cette loi a priori que nous analyserons maintenant le site de Lisieux pour la période du IV<sup>e</sup> siècle. Pour conforter la préconisation ci-dessus, commençons cependant par comparer les résultats obtenus sur la totalité de la période avec les deux lois a priori (Dirichlet « ordinaire » et « lissée ») ; on voit sur la figure 11, d'une part que le profil est voisin de celui de Frénoville (figure 10), époque mérovingienne (forte mortalité des jeunes, quoique un peu moindre), d'autre part que la comparaison des deux lois a priori fait ressortir les mêmes avantages de la seconde.

Mais un intérêt nouveau est ici que les squelettes étudiés ont pu être répartis en quatre périodes (les quatre quarts du siècle). Les lois de mortalité estimées sur chacun d'eux sont comparées dans la figure 12. Le second quart du siècle semble marqué par une plus forte mortalité des jeunes ;

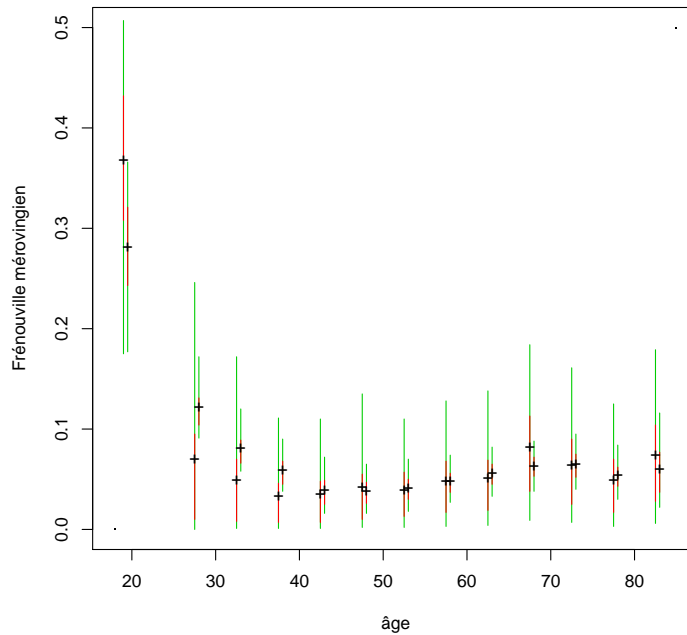


FIGURE 10: *Frénoville époque mérovingienne, estimation des 13 probabilités de décès (+) à partir de deux lois a priori, Dirichlet « ordinaire » et « lissée » (décalée sur la droite). Les traits verticaux donnent les intervalles de crédibilité à 50% (rouge) et 90% (vert).*

bien entendu la faiblesse des effectifs rend les estimations peu précises, comme indiqué par les intervalles de crédibilité. Aucune affirmation ferme ne peut être tirée de ces résultats, mais ils peuvent au moins guider vers la recherche de situations ou d'événements correspondant à une crise plus marquée dans cette courte période (voir à ce propos Paillard *et al.*, 2006).

## 7. Conclusion

L'estimation de la structure par âge au décès à partir de données biologiques sur une série de squelettes semble à première vue un problème de statistique anodin. Il n'en est rien cependant pour diverses raisons comme le prouve la quantité d'articles consacrée au sujet avant l'apparition de méthodes « raisonnables ». Nous avons développé ici la méthode bayésienne introduite dans Caussinus et Courgeau (2010) et confrontée à plusieurs exemples concrets dans Séguy *et al.* (2013). Comme avec toute méthode bayésienne, le choix de la loi de probabilité a priori est une question cruciale en présence de petits échantillons. Nos travaux antérieurs l'avaient abordé sous quelques premiers aspects. Nous avons poursuivi la réflexion en vue de mieux tenir compte de la nature d'une loi de mortalité ; les échanges entre statisticiens et paléodémographes ont mis en évidence l'importance de la corrélation des probabilités de décès pour des âges voisins. Nous proposons une façon de l'introduire, étayée par les théories démographiques et par des observations disponibles ; elle semble aller dans la bonne direction même si elle reste encore largement heuristique et demande à être approfondie. Notons que la construction d'une loi a

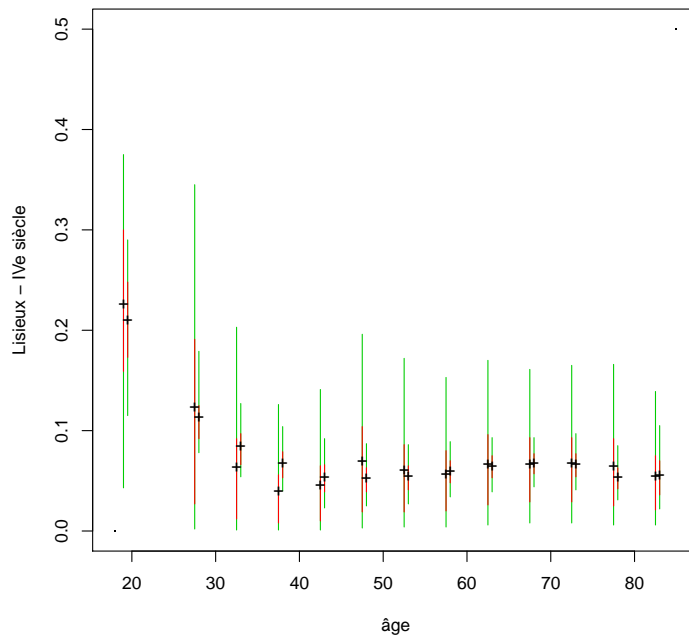


FIGURE 11: *Lisieux IVe siècle, estimation des 13 probabilités de décès (+) à partir de deux lois a priori, Dirichlet « ordinaire » et « lissée » (décalée sur la droite). Les traits verticaux donnent les intervalles de crédibilité à 50% (rouge) et 90% (vert).*

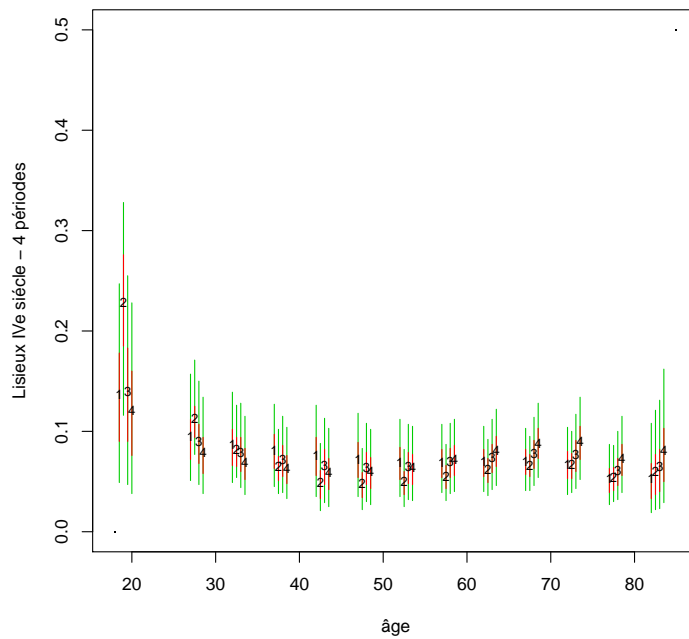


FIGURE 12: *Lisieux IVe siècle, estimation des 13 probabilités de décès pour chaque quart de siècle. Les traits verticaux donnent les intervalles de crédibilité à 50% (rouge) et 90% (vert).*

priori convenable pour traiter des petits échantillons est une question récurrente à laquelle il est impossible de donner une réponse générale tant elle dépend du contexte ; pour une autre proposition récente dans une situation différente de la nôtre on pourra consulter [Launay et al. \(2015\)](#) dont l'approche hiérarchique peut être exploitable dans plusieurs situations.

Par ailleurs, il est difficile d'avoir des données de référence fiables car elles doivent provenir d'un matériel relativement récent pour assurer l'existence de registres exploitables tout en étant représentatif d'une population préindustrielle. Beaucoup de travaux de paléodémographie restent d'ailleurs très « théoriques » faute de telles données en quantité et qualité suffisante. Baser l'étude statistique sur les synostoses crâniennes permet d'exploiter une base de données de référence « sérieuse ». Nous avons cependant cherché à vérifier sa qualité autant que faire se pouvait, c'est-à-dire en examinant sa cohérence, seul indicateur de fiabilité d'un ensemble de données anciennes.

Des données de référence fiables sur plusieurs indicateurs de l'âge osseux permettraient d'améliorer la qualité des résultats statistiques. Ce n'est pas encore le cas ; notons seulement que la méthode proposée pourrait facilement s'adapter à une telle situation, par exemple en considérant que la loi a posteriori trouvée avec l'analyse d'un premier indicateur devient la loi a priori dans l'étude d'un second, etc.

Certaines données de nature historique sont peu fiables autant que peu abondantes. Quelle est alors la place du statisticien ? Que peut-il et doit-il faire pour les exploiter au mieux ? Quelles informations générales doit-il intégrer ? Nous avons cherché à donner quelques pistes dans le contexte particulier de la paléodémographie, mais il y a bien d'autres domaines des sciences humaines dans lesquels les problèmes se posent de façon semblable avec des données parfois peu fiables et surtout peu nombreuses en regard de leur variabilité et/ou de leur faible corrélation avec le problème de fond étudié. C'est souvent le cas lorsque l'Homme est au cœur du débat depuis l'anthropologie jusqu'à la médecine légale. Dans ce dernier contexte, la justice interroge régulièrement le légiste sur l'âge d'adolescents sans papiers, une question d'autant plus délicate que les aspects éthiques se mêlent étroitement aux aspects proprement médicaux (voir par exemple [Aynsley-Green et al., 2012](#)) ; avec les modifications convenables, la technique présentée ici peut être utilisable pour exploiter les liens connus entre l'âge chronologique et un ou plusieurs critère(s) biologique(s) tout en précisant les limites des résultats de l'expertise ([Chariot et Caussin, 2015](#)). Mais c'est aussi le cas dans d'autres contextes, par exemple en archéozoologie où les problèmes de détermination d'un profil de mortalité se posent dans les mêmes termes qu'ici : recours, pour estimer l'âge à la mort, à des indicateurs ostéologiques dont la corrélation avec l'âge réel reste lâche et la fiabilité de lecture variable avec des collections de référence contemporaines et de petite taille, et des populations archéologiques de plus petite taille encore. Cela pourrait conduire nos collègues à appliquer aux espèces animales l'approche statistique proposée pour le genre Homo, même si des aspects spécifiques doivent être pris en compte ([Bréhard et al., 2014](#)). Insistons cependant sur le fait que l'efficacité de la méthode que nous préconisons est, en particulier, largement tributaire du choix de la loi a priori de  $p$  comme il ressort du présent article, et que ce choix dépendra évidemment de chaque cas particulier examiné.

## Remerciements

Les auteurs remercient Anne-Marie Mondot et Sébastien Déjean pour leur aide amicale et efficace dans l'analyse des données de référence au travers du modèle d'association de Goodman, ainsi que les rapporteurs et les éditeurs pour leurs remarques constructives ayant conduit à des améliorations substantielles du manuscrit initial.

## Références

- Aït-Sidi-Allal, M., Baccini, A. et Mondot, A. (2004). A new algorithm for estimating the parameters and their asymptotic covariance in correlation and association models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 45(3):389–421.
- Aynsley-Green, A., Cole, T., Crawley, H., Lessof, N., Boag, L. et Wallace, R. (2012). Medical, statistical, ethical and human rights considerations in the assessment of age in children and young people subject to immigration control. *British Medical Bulletin*, 102(1):17.
- Bocquet-Appel, J.-P. (1977). *Perspectives paléodémographiques*. Thèse d'anthropologie historique, EHESS, Paris.
- Bocquet-Appel, J.-P. et Bacro, J.-N. (2008). Estimation of an age distribution with its confidence intervals using an iterative bayesian procedure and a bootstrap sampling approach. In Bocquet-Appel, J.-P., éditeur : *Recent Advances in Palaeodemography : Data, Techniques, Patterns*, pages 63–82. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Bocquet-Appel, J.-P. et Masset, C. (1995). L'âge au décès dans les populations inhumées : comparaison de méthodes et de résultats. *Antropologia Portuguesa*, 13:39–48.
- Bréhard, S., Radu, V., Martin, A., Hanot, P., Popovici, D. et Bălăşescu, A. (2014). Food supply strategies in the romanian eneolithic : Sheep/goat husbandry and fishing activities from hârşova tell and borduşani-popină (5th millennium bc). *European Journal of Archaeology*, 17(3):407–433.
- Buchet, L. (1978). La nécropole gallo-romaine et mérovingienne de Frénouville (calvados). étude anthropologique. *Archéologie Médiévale*, VIII:5–53.
- Buchet, L. et Ségué, I. (2003). Les fouilles de l'ancien cimetière d'Antibes (06) : aspects paléodémographiques. *Mémoires de l'Institut de Préhistoire et d'Archéologie Alpes Méditerranée*, XLV:309–318. Nice.
- Buchet, L., Ségué, I., Boule, E.-L., Gallien, V. et Wabon, M. (2003). Mort probable, mort certaine. réflexions en paléodémographie à partir des squelettes modernes et contemporains. In *Sens dessus dessous - La recherche du sens en préhistoire, recueil d'études offerts à Jean Leclerc et Claude Masset*, volume 21 de *Revue Archéologique de Picardie*, pages 101–11.
- Caussinus, H. et Courgeau, D. (2010). Estimer l'âge sans le mesurer en paléodémographie. *Population*, 1–2:117–145.
- Caussinus, H. et Courgeau, D. (2011). Estimation de la structure par âge des décès : nouvelles propositions. In Ségué, I. et Buchet, L., éditeurs : *Manuel de paléodémographie*, Manuels, chapitre B, pages 291–325. INED, Paris.
- Chariot, P. et Caussinus, H. (2015). Age estimation in undocumented migrant adolescents : Medical response to judicial authorities. *La Presse Médicale*, 44(1):99 – 100.
- Goodman, L. A. (1986). Some useful extensions of the usual correspondence analysis approach and the usual log-linear models approach in the analysis of contingency tables (with discussion). *International Statistical Review*, 54:243–309.
- Goodman, L. A. (1991). Measures, models, and graphical displays in the analysis of cross-classified data. *Journal of the American Statistical Association*, 86(416):1085–1111.
- Graunt, J. (1662). *Observations naturelles et politiques répertoriées dans l'Index Ci-Après et faites sur les bulletins de mortalité*. Institut national d'études démographiques. Édition critique et traduction par Éric Vilquin, 1977.
- Hoppa, R. et Vaupel, J., éditeurs (2002). *Paleodemography : Age Distributions from Skeletal Samples*. Cambridge studies in biological and evolutionary anthropology. Cambridge University Press.
- Konigsberg, L. W. et Frankenberg, S. R. (1992). Estimation of age structure in anthropological demography. *American Journal of Physical Anthropology*, 89(2):235–256.
- Launay, T., Philippe, A. et Lamarche, S. (2015). Construction of an informative hierarchical prior for a small sample with the help of historical data and application to electricity load forecasting. *TEST*, 24(2):361–385.
- Masset, C. (1982). *Estimation de l'âge au décès par les sutures crâniennes*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII.
- Paillard, D., Buchet, L. et Alduc-Le Bagousse, A. (2006). Nombre d'inhumés, nombre d'habitants. estimations archéologiques et anthropologiques : Lisieux calvados, ive s de notre ère. In Buchet, L., Dauphin, C. et Ségué, I.,



- éditeurs : *La paléodémographie. Mémoire d'os, mémoire d'hommes. (Actes des 8e Journées Anthropologiques de Valbonne juin 2003)*, pages 209–223, Antibes. APDCA éd.
- Pilet, C. (1980). *La nécropole de Frénouville : étude d'une population de la fin du IIIe à la fin du VIIe siècle*. Numéro vol. 1 de BAR. International series ; 83iii. British Archaeological Reports.
- Robert, C. (2006). *Le choix bayésien : Principes et pratique*. Statistique et probabilités appliquées. Springer-Verlag France.
- Séguy, I. et Buchet, L. (2011). *Manuel de paléodémographie*. Manuels. INED, Paris.
- Séguy, I. et Buchet, L. (2013). *Handbook of Palaeodemography*. Springer International Publishing.
- Séguy, I., Caussinus, H., Courgeau, D. et Buchet, L. (2013). Estimating the age structure of a buried adult population : A new statistical approach applied to archaeological digs in France. *American Journal of Physical Anthropology*, 150(2):170–183.

### Annexe A: Population de référence utilisée

TABLEAU 3. *Distribution par stades (lignes) et par groupes d'âge (colonnes) de la population de référence sexes réunis.*

	18-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	≥ 80
A (0-4)	107	59	41	28	27	31	17	16	6	7	3	4	5
B (5-13)	27	20	25	33	31	24	24	25	14	10	14	13	15
C (14-20)	6	15	13	13	15	21	19	19	13	18	18	16	24
D (21-28)	5	8	10	7	8	12	21	15	23	26	19	23	37
E (29-40)	2	2	9	8	7	6	10	15	14	28	18	14	42
total	147	104	98	89	88	94	91	90	70	89	72	70	123

### Annexe B: Données anthropologiques et démographiques du cimetière d'Antibes (Alpes-Maritimes, fin XIXe siècle)

TABLEAU 4. *Distribution en cinq stades de synostose observée sur 73 squelettes (sexes réunis en raison du nombre important d'individus de sexe indéterminé).*

Stades de synostose (et coefficients)	A (0-4)	B (5-13)	C (14-20)	D (21-28)	E (29-40)
Nombre de squelettes	21	14	12	16	10

TABLEAU 5. *Distribution par âges au décès d'après les registres d'état civil.*

Groupes d'âges	18–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
Fréquence relative	0.031	0.065	0.062	0.054	0.054	0.065	0.052
Groupes d'âges	50–54	55–59	60–64	65–69	70–74	75–79	≥ 80
Fréquence relative	0.050	0.065	0.094	0.073	0.120	0.093	0.124

**Annexe C: Données anthropologiques du site de Frénouville**TABLEAU 6. *Distribution en cinq stades de synostose observée à Frénouville sur les deux périodes considérées.*

Stades (coefficients)	Effectifs	
	période gallo-romaine	période mérovingienne
A (0–4)	20	92
B (5–13)	10	29
C(14–20)	14	22
D (21–28)	13	27
E (29–40)	12	30
total	69	200

**Annexe D: Données anthropologiques du site de Lisieux (IVe siècle)**TABLEAU 7. *Distribution en cinq stades de synostose observée à Lisieux, totalité du IVe siècle et répartition par quarts de siècle.*

Stades (coefficients)	A (0–4)	B (5–13)	C (14–20)	D (21–28)	E (29–40)
IVe siècle, totalité	170	87	73	78	50
1er quart de siècle	34	23	17	17	6
2ème quart de siècle	56	19	14	20	17
3ème quart de siècle	39	27	26	21	10
4ème quart de siècle	41	18	16	20	17

**Annexe E: Sur quelques autres méthodes d'estimation**

Parmi les méthodes antérieures ayant une base mathématique claire, la plus populaire depuis [Konigsberg et Frankenberg \(1992\)](#) a été la méthode dite IALK, proposée plus tôt sous une forme équivalente par [Bocquet-Appel \(1977\)](#) et [Masset \(1982\)](#) dans leurs thèses malheureusement non publiées. Cette méthode consiste à remplacer les  $p_{i/j}$  par leur estimation à partir des données de référence et estimer les  $p_j$  par maximum de vraisemblance en considérant que les données de site suivent une distribution multinomiale de paramètres  $\pi_i$  liés aux précédents par la relation (1). Elle n'est utilisable que si le nombre de classes d'âge est inférieur (à la rigueur égal) à celui des stades osseux. Si l'on veut conserver un découpage relativement fin des âges, il faut moins regrouper les coefficients de synostose que nous le faisons ici ; mais cela diminue la fiabilité de l'attribution du stade par différents experts. A titre d'illustration, conservons donc cinq stades osseux mais ramenons le nombre de tranches d'âge à quatre : 18–34, 35–49, 50–64 et  $\geq 65$  ans. Nous examinons l'exemple d'Antibes pour lequel une évaluation des méthodes par comparaison aux registres est possible. Les probabilités estimées pour chacune des quatre

classes d'âge retenues, respectivement par la méthode IALK et la méthode bayésienne que nous préconisons, sont données dans le tableau 8.

[!h]

TABLEAU 8. *Antibes, quatre classes d'âge. Données des registres et estimations bayésienne (à partir du tableau 1), IALK et IALK avec deux modèles de mortalité (Gompertz et Weibull).*

Âge	18 - 34	35-49	50-64	$\geq 65$
Registres	0.212	0.171	0.209	0.410
Estimation bayésienne	0.226	0.188	0.248	0.336
Estimation IALK	0.361	0.000	0.344	0.295
Max. vrais. - Gompertz	0.290	0.192	0.144	0.374
Max. vrais. - Weibull	0.340	0.142	0.088	0.429

Les estimations IALK sont manifestement mauvaises, avec en particulier une valeur nulle évidemment inappropriée. En fait, le maximum de la vraisemblance n'est pas régulier (le gradient n'est pas nul) ; il est atteint sur la frontière du domaine acceptable (probabilités positives). Il est instructif de « bootstraper » les données de site pour examiner la stabilité de la méthode et la variance des estimateurs obtenus (les formules asymptotiques ne sont pas valables). Sur 10000 tirages on obtient le boxplot de la figure 13. On peut aussi noter que les moyennes des 10000 estimations ainsi recueillies (0.333 0.065 0.293 0.309) n'améliorent que peu les estimations, mais suppriment au moins la valeur nulle.

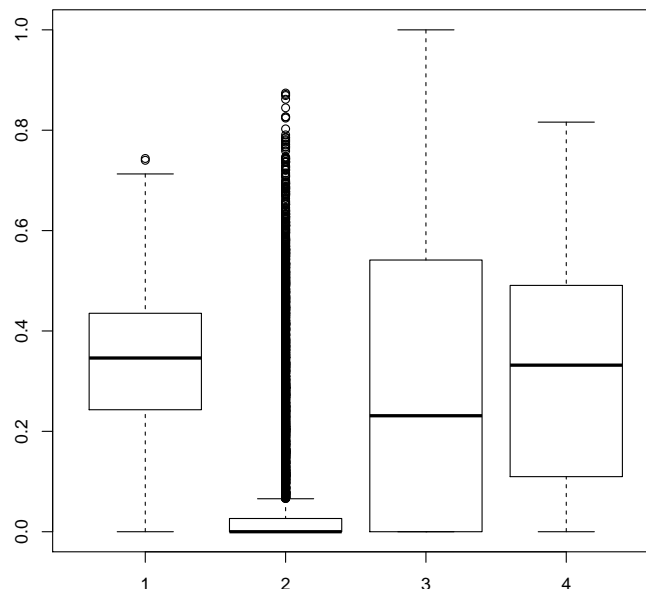


FIGURE 13: *Antibes. Boxplot obtenu en «bootstraper» les données de site.*

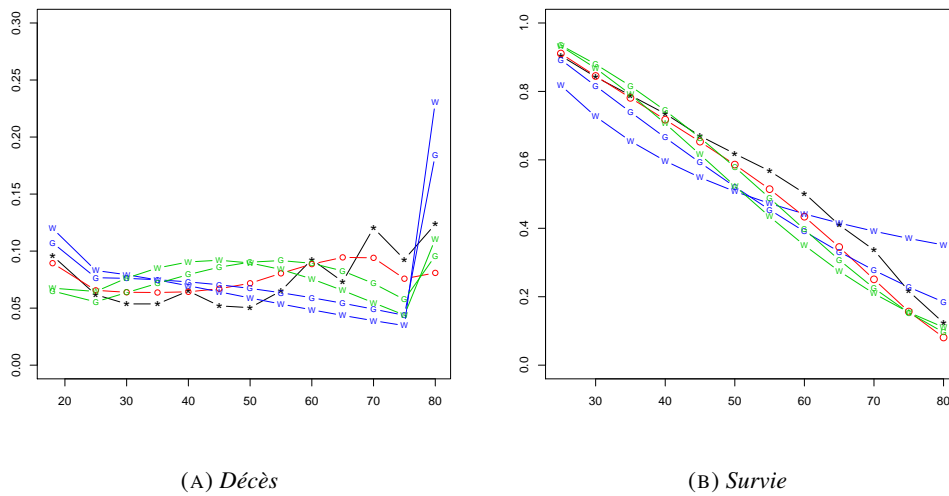


FIGURE 14: Antibes. Estimations ponctuelles des probabilités des 13 classes d'âge (à gauche) et des probabilités de survie (à droite) par trois méthodes : Bayes (ronds rouges), maximum de vraisemblance avec modèle de Gompertz ou de Weibull (lettres bleues); données des registres (étoiles noires), ajustement d'un modèle de mortalité aux estimations bayésiennes (lettres vertes).

Les  $p_{i/j}$  ne sont pas connus mais seulement estimés au moyen des données de référence. On peut modifier la méthode IALK en en tenant compte comme il est envisagé dans Caussinus et Courgeau (2010). Cela change très peu les estimations des  $p_j$  (et l'estimation nulle le reste). D'ailleurs, les estimations des  $p_{i/j}$  sont extrêmement proches des fréquences observées (écarts inférieurs à 0.005).

Pour essayer d'améliorer l'estimation en imposant le fait que les probabilités estimées correspondent à une certaine loi de mortalité, on peut introduire un modèle paramétrique reposant sur une loi classique de mortalité, par exemple la loi de Gompertz ou celle de Weibull (Séguy et Buchet, 2011, encadré 6, p. 142-143 par D. Courgeau), comme nous l'avons fait dans Séguy et al. (2013). Cela permet en outre d'utiliser une méthode de maximum de vraisemblance avec plus de cinq classes d'âge. Avec d'abord 4 classes d'âge, les résultats obtenus pour Antibes figurent dans le tableau 8, lignes 4 et 5. Les estimations fondées sur ces deux modèles sont un peu plus satisfaisantes par rapport aux valeurs des registres mais en restent globalement plus éloignées que les estimations bayésiennes.

En poursuivant avec les 13 classes d'âges considérées tout au long de cet article, nous obtenons les estimations illustrées par les figures 14. Le tableau 9 montre quelques mesures de l'écart entre diverses estimations et les valeurs des registres. Les estimations de maximum de vraisemblance avec modèle sont notées 1 lorsque les probabilités  $p_{i/j}$  sont considérées comme connues, 2 si l'on considère qu'elles sont seulement estimées au moyen des données de référence. On voit que cette seconde approche, la plus logique, améliore nettement l'estimation pour les deux modèles de mortalité mais reste nettement moins efficace que l'approche bayésienne. Finalement, nous avons cherché à ajuster par moindres carrés un modèle de Gompertz (resp. Weibull) aux estimations de Bayes. Le fait peut-être le plus remarquable est que les estimations des  $p_j$  qui en découlent

sont meilleures que les estimations de maximum de vraisemblance au sens des trois critères d'écart retenus (lignes 7 et 8 du tableau 9). Sur les figures 14, les estimations avec modèle sont données seulement pour la modalité 2 en vertu de ce qui précède. On voit en quoi les modèles considérés arrivent mal à s'adapter aux mortalités des registres, particulièrement celui de Weibull, et expriment des structures de mortalité différentes selon qu'ils sont estimés directement ou à partir de l'estimation bayésienne. Notons enfin incidemment que nous comparons dans le tableau 9 les performances des estimations bayésiennes obtenues avec deux lois a priori discutées dans cet article ; comme il est dit dans la section 6, les deux lois ne donnent pas des résultats très différents sur ce site d'Antibes, la seconde conduisant seulement à une très légère amélioration.

TABLEAU 9. *Écarts aux registres : quadratique (eq), quadratique relatif (eqr) et maximum (max) pour divers types d'estimation.*

Écarts aux registres	eq	eqr	max
Bayes, a priori Dirichlet ordinaire	0.005	0.054	0.043
Bayes, a priori Dirichlet lisse	0.004	0.052	0.043
Max. vrais. Gompertz 1	0.028	0.269	0.111
Max. vrais. Weibull 1	0.084	0.767	0.228
Max. vrais. Gompertz 2	0.015	0.151	0.071
Max. vrais. Weibull 2	0.027	0.258	0.107
Gompertz ajusté à estimation de Bayes	0.010	0.127	0.049
Weibull ajusté à estimation de Bayes	0.014	0.180	0.066

Sans prétendre être complet dans l'évocation des méthodes statistiques antérieurement préconisées, mentionnons celle de [Bocquet-Appel et Bacro \(2008\)](#). Celle-ci repose sur l'introduction d'une liste de lois (modèles) de mortalité envisageables parmi lesquelles il s'agit de choisir celle qui convient le mieux pour le site considéré, l'opération étant répétée en bootstrapant les données de référence pour tenir compte de leur caractère aléatoire. Ce n'est pas une approche bayésienne au sens propre tout en s'en approchant. En fait, même si les développements sont différents des nôtres et si ces auteurs construisent autrement leur liste « a priori » de lois de mortalité, celle-ci a une fonction semblable à notre liste de 167 lois mentionnée au début de la section 6. Si l'on veut rapprocher la méthode de Bocquet-Appel et Bacro de la nôtre, c'est surtout en assortissant cette dernière d'une loi a priori uniforme sur une liste de modèles de mortalité. Une comparaison détaillée des deux approches est présentée dans [Caussinus et Courgeau \(2010\)](#). Ajoutons seulement à cette étude que l'introduction de la nouvelle loi a priori de la section 6 ne peut que confirmer la plus grande efficacité de notre approche dans la grande majorité des cas.