

## Modélisation de la dégradation d'un composant à partir du retour d'expérience

**Title:** Component degradation modeling based on feedback data

Aurélie Billon<sup>1</sup>, Laurent Bordes<sup>2</sup>, Pierre Darfeuill<sup>3</sup>, Sophie Humbert<sup>3</sup> et Christian Paroissin<sup>2</sup>

**Résumé :** Nous proposons une modélisation de la dégradation d'un composant en partant des données disponibles issues du retour d'expérience sur les moteurs d'hélicoptère Turbomeca (Groupe Safran). La défaillance d'un composant menant à un événement d'intérêt peut être due à différentes dégradations. Aussi, ces différents mécanismes de défaillance sont mis en concurrence dans le modèle proposé. Deux cas sont distingués selon que les mécanismes sont indépendants ou pas. Pour chacune de ces situations, nous proposons une manière d'estimer les paramètres du modèle. La seconde partie des travaux développe une méthode permettant d'évaluer la fiabilité du composant si aucune maintenance n'est appliquée. Ce modèle, une fois ajusté, permet par exemple d'optimiser la politique de maintenance préventive.

**Abstract:** We propose a degradation model for a component based on the available data of Turbomeca (Safran Group) turboshaft engine (feedback data). Component failure leading to a certain event can be due to several degradation mechanisms. Thus, a competing risks model is considered for these mechanisms. Two cases are distinguished: either degradation mechanisms are independent or their dependency is specified. For each situation, we propose an inference method. The second part of the work aims to evaluate the reliability of an unmaintained component. Once this model is fitted, we are able to optimize the periodic preventive maintenance policy.

**Mots-clés :** inspection périodique, maintenance préventive, modèle markovien, modèle multi-états, risques concurrents  
**Keywords:** competing risks, Markovian model, multi-state model, periodic inspection, preventive maintenance  
**Classification AMS 2000 :** 62N05, 62N01, 90B25

### 1. Introduction

Dans le cadre du suivi des moteurs d'hélicoptère Turbomeca (Groupe Safran), nous nous intéressons à la modélisation de la dégradation d'un moteur pouvant conduire à un événement d'intérêt (événement étudié dans le cadre des analyses de sécurité). Cet événement peut résulter de différentes pannes sur différents composants, elles-mêmes dues à une ou plusieurs dégradations (autrement dit, à plusieurs mécanismes de défaillance). L'objectif est alors de mettre en place, pour chaque composant, un modèle de dégradation dans lequel plusieurs mécanismes de défaillance sont en concurrence vis-à-vis de la défaillance de ce composant. Ce modèle sera basé sur les données de retour d'expérience (REX) disponibles du matériel en service, comme par exemple les

<sup>1</sup> SAFRAN engineering, Bordes, France.

E-mail : [aurelie.billon@safran-engineering.com](mailto:aurelie.billon@safran-engineering.com)

<sup>2</sup> Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau, France.

E-mail : [laurent.bordes@univ-pau.fr](mailto:laurent.bordes@univ-pau.fr) et E-mail : [cparoiss@univ-pau.fr](mailto:cparoiss@univ-pau.fr)

<sup>3</sup> Turbomeca (Groupe Safran), Bordes, France.

E-mail : [pierre.darfeuill@turbomeca.fr](mailto:pierre.darfeuill@turbomeca.fr) et E-mail : [sophie.humbert@turbomeca.fr](mailto:sophie.humbert@turbomeca.fr)

observations des niveaux de dégradation de composants à des temps de fonctionnement (heures de vol) différents. Ce modèle permettra, par exemple, de vérifier que les exigences fixées de fiabilité et de sécurité du composant sont satisfaites, ou encore d'étudier l'impact d'un nouvel événement survenu en service sur la probabilité d'occurrence de l'événement d'intérêt.

Les modèles markoviens multi-états ont été utilisés avec succès depuis plusieurs décennies. On pourra consulter l'état de l'art proposé par Hougaard (1999). Le lecteur pourra également consulter l'article de Commenges (1999) ou celui d'Andersen and Keiding (2002) pour des applications orientées vers l'épidémiologie. L'inférence statistique de ces modèles a également été étudiée dans la littérature, voir, par exemple, le livre de Kalbeisch and Prentice (2002, chapitre 8) ou celui de Lawless (2003, chapitre 11). C'est principalement dans le domaine de la biostatistique et de l'épidémiologie que ces modèles ont été considérés sur le plan statistique (Alioum and Commenges, 2001; Commenges, 2002; Joly et al., 2002). Plus récemment, des extensions à des modèles non-markoviens ont fait l'objet d'attention, en particulier le cas de modèles multi-états semi-markoviens (voir l'état de l'art proposé par Yang, 2011 dans sa thèse). Dans le domaine de la fiabilité et de la sûreté de fonctionnement, les modèles multi-états ont été également étudiés. On pourra consulter l'ouvrage de Lisnianski and Levitin (2003) ou celui dirigé par Lisnianski and Frenkel (2012) (en particulier, pour des applications en maintenance, voir le chapitre écrit par Kahle). Enfin, pour des applications, voir Guo et al. (2010); Kallen (2009); Kallen and van Noortwijk (2006); Natvig and Mørch (2003), par exemple. Dans ce qui suit nous considérons des modèles de dégradation markoviens paramétriques parmi les plus simples (processus de Markov de sauts à espace d'états fini). La faible quantité d'information disponible, due à l'incomplétude des observations dans les cas d'études qui nous intéressent (données fortement censurées puisque les occurrences en service des événements étudiés sont rares), ne nous permet pas de travailler avec des modèles de grande dimension.

Dans la deuxième section, nous proposons un cas d'étude (le pignon) qui permet à la fois d'illustrer le type de composants concernés et de donner des précisions sur les données disponibles (Retour d'EXpérience en service ou REX). Les composants d'un turbomoteur sont soumis à des visites périodiques et des inspections non programmées (la nature, périodique ou non programmée, de l'inspection d'un composant n'est pas indiquée dans la base de données disponible). Dans la section 3, nous proposons un modèle markovien de la dégradation d'un composant sur la base du retour d'expérience. Ce modèle, qui est à la base de notre travail, est classique tout comme l'inférence statistique qui résulte du principe du maximum de vraisemblance. Deux cas sont distingués selon que les mécanismes de défaillance sont supposés indépendants ou non. Des estimateurs des paramètres de ce modèle sont proposés dans la section 4. Ce premier développement méthodologique original conduit à un modèle paramétrique de Cox où ni la variable d'entrée, ni la variable de sortie, ne sont complètement observées. Cependant, à ce stade, les conclusions tirées à partir de ce modèle basé sur le REX ne sont applicables qu'à la flotte avec la politique de maintenance préventive appliquée en service. En effet, les niveaux de dégradation observés sont fortement liés à la politique de visite périodique. Afin de pouvoir prédire les effets d'un changement de celle-ci (par exemple, pour pouvoir l'optimiser), il est nécessaire d'évaluer la dégradation "intrinsèque" d'un composant, c'est-à-dire, d'estimer la dégradation d'un composant en l'absence d'une politique de maintenance préventive périodique. Un second développement méthodologique nouveau est alors proposé à la section 5. Cette méthode permet d'évaluer la fiabilité intrinsèque du composant qui est approchée par un principe du minimum de distance. Ce

modèle, une fois ajusté, permet par exemple d'optimiser la politique de maintenance préventive vis-à-vis d'un mécanisme de défaillance. Quelques remarques concluent l'article à la section 6.

## 2. Un cas d'étude : le pignon

Le cas d'étude présenté ici, le pignon, est inspiré de la réalité mais n'en reprend pas toute la complexité. Il s'agit plutôt de présenter un exemple d'application possible. Un cas réel plus complexe est décrit dans la thèse d'Aurélié Billon (Billon, 2012).

### 2.1. Description du composant

Le composant constituant le cas d'étude est un pignon (figure 2.1).



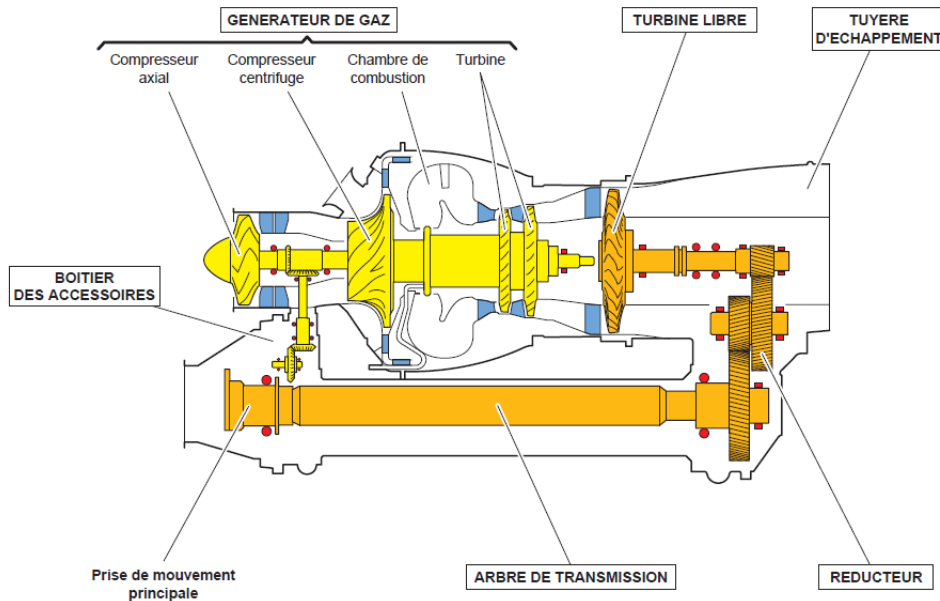
FIGURE 1. Un pignon

Un pignon est une roue dentée utilisée pour transmettre de la puissance à travers un mécanisme. Par exemple, ce composant peut être utilisé dans un turbomoteur pour transmettre la puissance du moteur au rotor de l'hélicoptère afin de l'entraîner en rotation. On peut, par exemple, trouver ce genre de composant dans la boîte accessoires ou le réducteur (voir figure 2.1).

Nous considérons les dégradations qui peuvent conduire à la défaillance « perte de transmission de l'entraînement ». Nous supposons, pour simplifier, qu'il en existe deux : *usure* et *crique*. Ces deux dégradations ne peuvent être détectées que lors des inspections à l'occasion desquelles une action de maintenance peut être réalisée (ou pas). Elles se différencient par le fait que la présence d'usure sur le pignon est tolérable dans une certaine limite, alors que la présence d'une crique n'est jamais acceptable. Lors de l'opération de maintenance, la pièce sera donc rebutée si l'usure a dépassé la tolérance fixée et/ou si une crique est présente (dans les autres cas, le composant sera remis en service en l'état). On classe les différents niveaux de dégradation suivant la "nomenclature" du tableau 1 pour un mécanisme de défaillance.

TABLEAU 1. Codage des états potentiels de dégradation

État	Description
0	Pas de dégradation
1	Dégradation dans les limites de tolérance
2	Dégradation hors des limites de tolérance
3	Défaillance

FIGURE 2. Un turbomoteur à turbine libre (*Manual, 2010*)

## 2.2. Données disponibles (REX)

Les données disponibles (pour le pignon, mais aussi pour tous les autres composants d'un turbomoteur) dans le REX correspondent aux heures de fonctionnement du composant enregistrées lors de l'inspection ainsi que le niveau de dégradation du composant qui est formalisé comme suit : aucune dégradation observée ; présence d'une usure tolérable ; présence d'une usure non tolérable ; présence d'une crique ; composant en panne. Si une dégradation est observée lors d'une inspection, nous ignorons depuis quand celle-ci est présente. De manière générale, les différentes dégradations sont détectables dans seulement deux situations :

- lors d'une inspection, programmée ou non programmée, si la dégradation est présente mais n'a pas encore conduit à la défaillance du composant (effet non observable en exploitation) ;
- lorsqu'il y a un effet sur le système si la dégradation a conduit à la défaillance du composant.

L'état de panne du composant est observé seulement si la défaillance a lieu avant qu'une inspection ait révélé une dégradation hors tolérances. Seuls les temps de défaillance sont exacts. Pour les autres temps, on se trouve ainsi en présence de durées censurées. Pour chaque composant, nous ne disposons de l'état de celui-ci qu'à une seule date. En effet, compte tenu de la diversité des sites de réparation, il n'est pas souvent possible de faire l'historique de vie d'un composant. Le tableau 2 contient un exemple de données qui peuvent être extraites du REX (données modifiées pour des raisons de confidentialité), en utilisant la classification décrite dans le tableau 1. Par exemple, au bout de 908 heures de vol, le troisième individu ne présente aucune dégradation par rapport au premier mécanisme de défaillance mais une dégradation hors tolérance par rapport au second mécanisme.

Si on s'intéresse seulement au temps jusqu'à l'état de panne pour chacun des mécanismes de défaillance, on peut essayer d'ajuster une loi paramétrique (par exemple, une loi de Weibull).

TABLEAU 2. Exemple de données issues du REX (données modifiées)

Individu	Nombre heures de vol	État mécanisme 1	État mécanisme 2
1	1203	0	0
2	3201	3	0
3	908	0	2
4	2389	1	3
5	2805	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮

Dans ce cas, le REX, illustré par le tableau 2, fournit de nombreuses durées censurées à droite et plus rarement des durées exactes.

Durant une inspection, plusieurs actions sont possibles. Nous ferons ici les hypothèses suivantes :

- si aucune dégradation n'est présente ou si elle est dans les tolérances fixées, le composant sera remis en service en l'état,
- si la dégradation détectée est en dehors des tolérances fixées, le composant sera rebuté, *i.e.* remplacé par un composant neuf.

Les composants sont inspectés théoriquement plusieurs fois dans leur vie, d'une part lors de visites périodiques et d'autre part lors de visites non programmées. Les dates des visites périodiques sont déterministes (ou presque car, en pratique, il existe une certaine tolérance vis-à-vis des dates d'inspection). Cette variabilité peut être négligée, et on suppose que les inspections ont lieu aux dates "théoriques". C'est ce délai entre deux visites périodiques qui nous intéressera par la suite. A ces visites périodiques, il faut rajouter des visites non programmées. En effet, pour diverses raisons (visite périodique d'un composant voisin, bruits suspects, indications de besoin de maintenance, etc.), le turbomoteur ou le module (*i.e.* un bloc du turbomoteur) a pu être déposé et le composant étudié inspecté. Ces visites non programmées doivent être considérées dans l'analyse du REX mais sont difficiles à inclure dans un modèle portant sur un composant.

Les informations disponibles dans la base de données ne nous permettent pas de savoir si la dépose du composant est liée à une visite périodique ou à une inspection non programmée. De plus, nous ne disposons que d'une seule observation par composant, dans une écrasante majorité des cas. Concernant les rares cas de composants observés deux fois (ou plus), il a été décidé de considérer qu'il s'agissait de deux (ou plusieurs) composants différents.

### 3. Modélisation de la dégradation et de la défaillance d'un composant

En partant des données disponibles dans la base de données du REX, nous proposons un modèle où deux types de mécanismes de défaillance sont considérés (sous-section 3.1). Ces mécanismes sont alors mis en concurrence pour décrire la défaillance d'un composant (sous-section 3.2).

#### 3.1. Modélisation des mécanismes de défaillances

##### 3.1.1. Mécanisme de défaillance « avec tolérance »

Considérons dans un premier temps un mécanisme de défaillance qui évolue au cours du temps et dont la présence sur le composant est acceptable sous certaines conditions (par exemple, une

usure sur un pignon). La tâche de maintenance associée à ce type de mécanisme de défaillance dépend d'un critère de tolérance (critère qualitatif ou quantitatif vérifié lors de l'inspection). Par conséquent, ce type de mécanisme de défaillance est caractérisé par le fait que l'on observe deux stades successifs de dégradation : le premier stade correspond à un niveau de dégradation dans les tolérances, il est acceptable pour le maintien en service du composant ; le second correspond à un niveau de dégradation hors tolérances qui entraîne la remise à neuf du composant. Ce type de mécanisme de défaillance résulte de dégradations « avec tolérance ». A partir du moment où la dégradation est hors tolérances, le composant peut défaillir à tout instant (la défaillance n'est pas définie à l'aide d'un seuil). Les différents états de dégradation jusqu'à la défaillance sont résumés sur la figure 3(a).

Ce modèle fait donc intervenir quatre états. Nous supposons par la suite que les durées dans chacun des états (sauf le dernier état qui est absorbant) sont des variables aléatoires indépendantes. On peut décrire l'évolution de la dégradation à l'aide d'un processus stochastique  $(Z_t^{(at)})_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Nous faisons l'hypothèse que  $Z_0^{(at)} = 0$  presque sûrement.

Compte tenu du REX disponible (taux de censure élevé), nous nous limitons au modèle le plus simple, en considérant des lois exponentielles pour les temps de séjour. Nous obtenons alors un modèle markovien dont les transitions sont décrites sur la figure (3)b. Pour tout couple d'états  $(u, v)$  avec  $u < v$ , notons  $X_{u,v}^{(at)}$  la durée écoulée entre l'entrée dans l'état  $u$  et l'entrée dans l'état  $v$ . En particulier,  $X_{u,u+1}^{(at)}$  est le temps de séjour dans l'état  $u$  qui est donc de loi exponentielle dont le paramètre sera noté  $\lambda_{u,u+1}^{(at)}$ . Enfin, le temps de défaillance associé à ce mécanisme est la durée  $X_{03}^{(at)}$  dont nous pouvons calculer la loi explicitement. Par exemple, si tous les taux de transition sont différents, nous obtenons l'expression suivante pour la densité de la loi de  $X_{03}^{(at)}$  (on peut aussi calculer les densités pour les temps d'atteinte des autres états) :

$$\forall t \geq 0, \quad f_{X_{03}^{(at)}}(t) = \frac{\lambda_{01}^{(at)} \lambda_{12}^{(at)} \lambda_{23}^{(at)}}{\lambda_{01}^{(at)} - \lambda_{12}^{(at)}} \left( \frac{e^{-\lambda_{23}^{(at)} t} - e^{-\lambda_{12}^{(at)} t}}{\lambda_{12}^{(at)} - \lambda_{23}^{(at)}} - \frac{e^{-\lambda_{23}^{(at)} t} - e^{-\lambda_{01}^{(at)} t}}{\lambda_{01}^{(at)} - \lambda_{23}^{(at)}} \right). \quad (1)$$

Il est possible de calculer la densité de  $X_{03}^{(at)}$  lorsqu'exactly deux taux sont identiques ou lorsque tous les taux sont égaux (dans ce cas, nous obtenons une loi d'Erlang), voir [Billon \(2012\)](#) pour plus de détails.

On peut relier le processus  $(Z_t^{(at)})_{t \geq 0}$  aux durées de séjour décrites ci-dessus de la manière suivante :

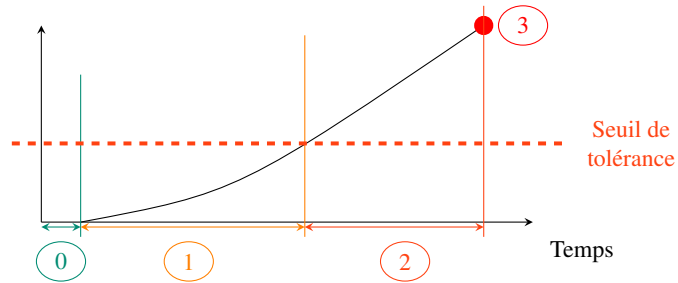
$$\mathbb{P} \left[ Z_t^{(at)} = u \right] = \mathbb{P} \left[ X_{0,u}^{(at)} \leq t < X_{0,u+1}^{(at)} \right] \quad \text{pour } u \in \{0, 1, 2, 3\},$$

en ajoutant les notations  $X_{0,0}^{(at)} = 0$  et  $X_{0,4}^{(at)} = +\infty$ .

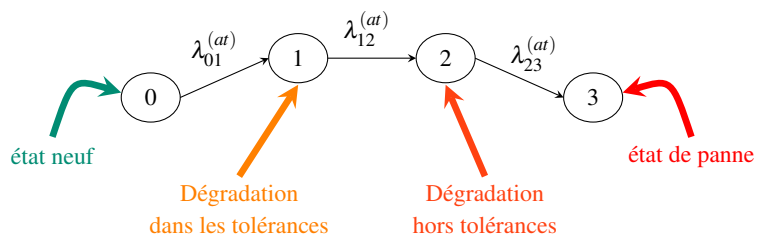
### 3.1.2. Mécanisme de défaillance « sans tolérance »

Considérons maintenant un mécanisme de défaillance dont la présence n'est jamais tolérée sur le composant (par exemple, une crique sur un pignon). Dès leur apparition, ces dégradations sont hors tolérance. Ce type de mécanisme de défaillance résulte d'une dégradation « sans tolérance ». Les différents états sont résumés sur la figure 4(a). Ici également, nous pouvons décrire l'évolution

Evolution de l'usure



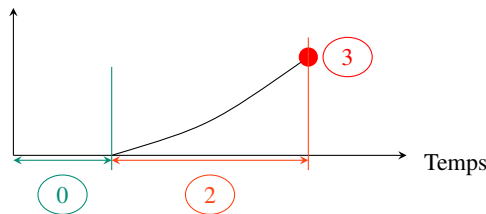
(a) Exemple d'évolution de dégradation « avec tolérance »



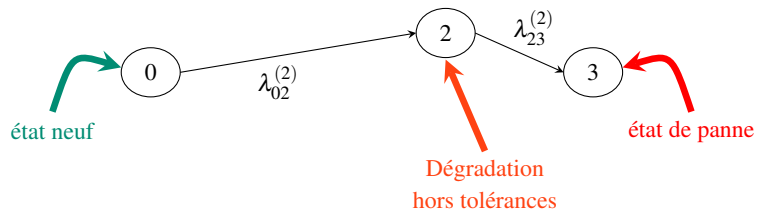
(b) Graphe de Markov du mécanisme de défaillance « avec tolérance »

FIGURE 3. Dégradation « avec tolérance »

Evolution de la crique



(a) Exemple de dégradation « sans tolérance »



(b) Graphe de Markov du mécanisme de défaillance « sans tolérance »

FIGURE 4. Dégradation « sans tolérance »

de cette dégradation à l'aide d'un processus stochastique  $(Z_t^{(st)})_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\{0, 2, 3\}$  (avec la même condition initiale  $Z_0^{(st)} = 0$  presque sûrement).

De même que pour un mécanisme de défaillance « avec tolérance », nous supposons que les durées dans chaque état sont des variables aléatoires indépendantes et de lois exponentielles. Le modèle markovien obtenu est décrit par la figure 4(b). Nous obtenons la densité suivante pour le temps avant défaillance  $X_{03}^{(st)}$  (si les deux taux sont différents - ce qui sera supposé tout au long de cet article, les autres cas pouvant être calculés de manière tout à fait analogue) :

$$\forall t \geq 0, \quad f_{X_{03}^{(st)}}(t) = \frac{\lambda_{23}^{(st)} \lambda_{02}^{(st)}}{\lambda_{02}^{(st)} - \lambda_{23}^{(st)}} \left( e^{-\lambda_{23}^{(st)} t} - e^{-\lambda_{02}^{(st)} t} \right). \quad (2)$$

### 3.2. Modélisation de la dégradation d'un composant

Nous considérons qu'un composant peut être soumis à plusieurs mécanismes de défaillance de natures différentes et en concurrence. Dans ce qui suit nous supposons qu'ils sont au nombre de deux, indépendants ou dans une forme de dépendance que nous préciserons.

#### 3.2.1. Indépendance des mécanismes de défaillance

Considérons maintenant un composant, comme le pignon, soumis à une dégradation avec tolérance et à une dégradation sans tolérance indépendantes l'une de l'autre. Ces deux mécanismes de défaillance sont mis en concurrence, cela signifie que la défaillance du composant aura lieu dès que l'un des deux mécanismes de défaillance aura atteint l'état 3. Le composant peut donc se trouver dans les états  $(u, v)$  où  $u$  correspond à l'état de la dégradation avec tolérance et  $v$  à celui de la dégradation sans tolérance (figure 3.2.1).

Les états pour lesquels une des dégradations est dans un état de panne (état 3) sont des états absorbants. Une fois un état de panne atteint, on procède à une opération de maintenance corrective pour remettre le composant en état de marche. Lorsque les deux dégradations sont indépendantes, on vérifie facilement que la probabilité que les deux mécanismes de défaillance conduisent simultanément à la défaillance du composant est nulle. De plus, on suppose qu'il n'existe pas de cause commune de défaillance (Cocozza-Thivent, 1997). On ne peut donc pas passer directement de l'état  $(2, 2)$  à l'état  $(3, 3)$ .

Lorsque les mécanismes de défaillance sont indépendants, ils peuvent être traités séparément.

#### 3.2.2. Un exemple avec dépendance des mécanismes de défaillance

Avoir un modèle bivarié nous permet également de modéliser des dépendances entre plusieurs dégradations. Le modèle proposé ci-dessus repose sur l'hypothèse d'indépendance mutuelle des deux mécanismes de défaillance en concurrence vis-à-vis de la défaillance du composant. Cela signifie qu'un mécanisme de défaillance ne peut influencer la vitesse de dégradation de l'autre. Cette hypothèse peut être acceptée par avis d'expert qui peut confirmer que les mécanismes de défaillance considérés sont bien distincts et qu'ils n'interagissent pas. Cependant, il n'est pas toujours évident d'avoir l'expérience et un tel avis a priori. Nous proposons ici une solution basée sur le REX pour évaluer la présence d'une dépendance entre deux mécanismes de défaillance.



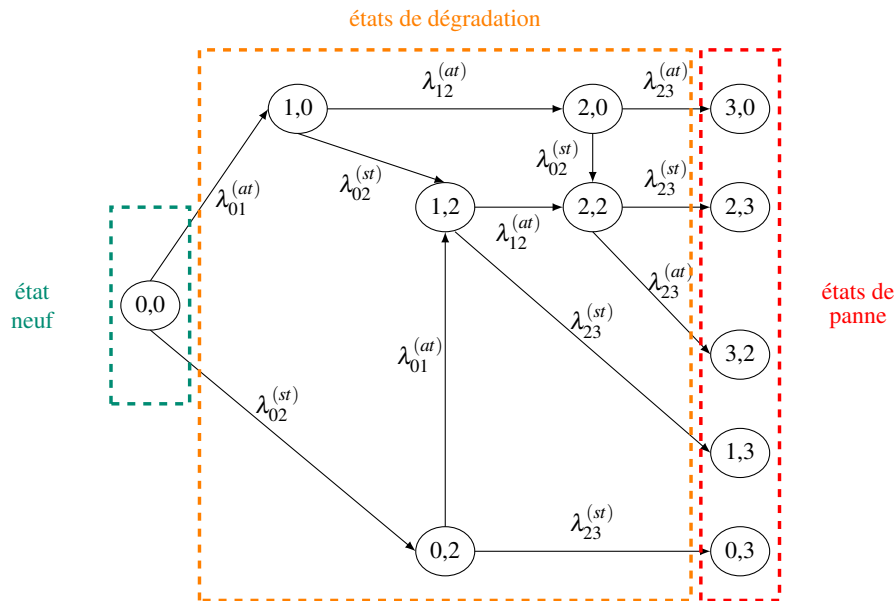


FIGURE 5. Processus de Markov d'un système à deux mécanismes de défaillance

Nous supposons que le niveau d'une dégradation a un impact sur l'évolution de la seconde dégradation. Nous allons donc modifier le modèle précédent afin de prendre en compte cette potentielle dépendance. L'objectif sera de pouvoir diagnostiquer l'existence d'une dépendance entre deux mécanismes de défaillance mis en concurrence vis-à-vis de l'événement d'intérêt.

Par exemple, nous pouvons raisonnablement supposer qu'une usure en dehors des tolérances puisse avoir un impact sur la survenue d'une crique. Considérons que si aucune usure n'est présente sur le composant ou si l'usure présente est toujours dans des tolérances acceptables, l'usure n'a pas d'impact sur le risque d'apparition d'une crique. La probabilité d'occurrence d'une crique est donc la même que dans le cas de l'indépendance. Dans ce cas, nous considérons que le taux de transition  $\lambda_{02}^{(st,dep)}$  entre l'état 0 (état neuf du composant) et l'état 2 (dégradation hors tolérance) de la crique est  $\lambda_{02}^{(st)}$ . Si une usure hors tolérance est présente sur le composant, nous supposons qu'elle peut avoir un impact sur le risque d'apparition de crique. Pour traduire cet impact, on considère que le taux de transition  $\lambda_{02}^{(st,dep)}$  entre les états 0 et 2 devient égal à  $c\lambda_{02}^{(st)}$ . Ce taux de transition dépend alors du temps et est constant par morceaux : conditionnellement à  $X_{02}^{(at)} = x_{02}^{(at)}$

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda_{02}^{(st,dep)}(t|x_{02}^{(at)}) = \lambda_{02}^{(st)} \mathbf{1}(t \in [0; x_{02}^{(at)}[) + c\lambda_{02}^{(st)} \mathbf{1}(t \in [x_{02}^{(at)}; +\infty[).$$

Si  $c > 1$  (resp.  $c < 1$ ), le taux de transition entre l'état 0 et 2 pour le second mécanisme de défaillance augmente (resp. diminue) et donc le risque de dégradation augmente (resp. diminue). Si  $c = 1$ , on se retrouve dans la situation d'indépendance des mécanismes de défaillance. Pour ce modèle, seule la loi de la variable aléatoire  $X_{02}^{(st)}$  dépend de  $X_{01}^{(at)}$  et  $X_{12}^{(at)}$ , à travers leur somme. Cela revient à modifier le taux de transition de l'état (2,0) vers l'état (2,2) sur la figure 3.2.1 : nous avons donc effectué une modification locale du graphe de Markov. Le modèle bivarié reste

markovien. Un modèle bivarié markovien "complètement" dépendant correspond à la situation où tous les taux de transition seraient directement définis sur le modèle bivarié (et non pas à partir des processus marginaux comme pour le premier modèle). Un tel modèle ferait intervenir un très grand nombre de paramètres. Or, dans les applications industrielles visées, il est préférable d'avoir un modèle parcimonieux, eu égard à des taux de censure élevés. Enfin, notons que le modèle retenu pour la transition de l'état 0 vers l'état 2 est un modèle paramétrique de Cox (Cox, 1972) avec covariable dépendante du temps partiellement observée (rappelons que les durées  $X_{02}^{(at)}$  et  $X_{02}^{(st)}$  sont systématiquement censurées).

## 4. Inférence statistique

### 4.1. Estimation des paramètres

Afin d'estimer les paramètres du modèle proposé précédemment, nous proposons d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance. Nous allons donc donner l'expression de la fonction de vraisemblance correspondant aux données disponibles dans le REX.

#### 4.1.1. Indépendance des mécanismes de défaillance

Notons  $n$  le nombre d'individus observés. Pour le  $i$ -ème individu, notons  $(t_i, \delta_i^{(at)}, \delta_i^{(st)})$  les observations le concernant : à l'instant  $t_i$ , ce composant était dans l'état  $\delta_i^{(at)}$  pour le mécanisme de défaillance avec tolérance et dans l'état  $\delta_i^{(st)}$  vis-à-vis du mécanisme de défaillance sans tolérance. Les deux dégradations étant supposées indépendantes, nous obtenons la fonction de vraisemblance suivante :

$$L(\theta | \text{data}) = \prod_{i=1}^n f_{Z_i^{(at)}}(t_i, \delta_i^{(at)} | \theta^{(at)}) f_{Z_i^{(st)}}(t_i, \delta_i^{(st)} | \theta^{(st)}),$$

où  $\theta = (\theta^{(at)}, \theta^{(st)})$ , avec  $\theta^{(at)} = (\lambda_{01}^{(at)}, \lambda_{12}^{(at)}, \lambda_{23}^{(at)})$  et  $\theta^{(st)} = (\lambda_{02}^{(st)}, \lambda_{23}^{(st)})$ , et où

$$f_{Z_i^{(at)}}(t_i, \delta_i^{(at)} | \theta^{(at)}) = \begin{cases} \mathbb{P}[Z_i^{(at)} = \delta_i^{(at)}] & \text{si } \delta_i^{(at)} \in \{0, 1, 2\} \\ f_{X_{03}^{(at)}}(t_i) & \text{si } \delta_i^{(at)} = 3 \end{cases}$$

et de manière analogue :

$$f_{Z_i^{(st)}}(t_i, \delta_i^{(st)} | \theta^{(st)}) = \begin{cases} \mathbb{P}[Z_i^{(st)} = \delta_i^{(st)}] & \text{si } \delta_i^{(st)} \in \{0, 2\} \\ f_{X_{03}^{(st)}}(t_i) & \text{si } \delta_i^{(st)} = 3 \end{cases}.$$

Pour une justification rigoureuse de la construction de la fonction de vraisemblance, nous renvoyons à Billon (2012). Détaillons maintenant le cas où  $(Z_i^{(at)}, Z_i^{(st)}) = (2, 0)$  pour un instant  $t$

donné (pour les autres cas, voir Billon, 2012) :

$$\begin{aligned} f_{Z_t^{(at)}}(t, 2 | \theta^{(at)}) &= \int_0^t \int_0^{t-x_{01}^{(at)}} \int_{t-x_{01}^{(at)}-x_{12}^{(at)}}^{\infty} f_{X_{23}^{(at)}}(x_{23}^{(at)}) f_{X_{12}^{(at)}}(x_{12}^{(at)}) f_{X_{01}^{(at)}}(x_{01}^{(at)}) dx_{23}^{(at)} dx_{12}^{(at)} dx_{01}^{(at)} \\ &= \frac{\lambda_{01}^{(at)} \lambda_{12}^{(at)}}{\lambda_{12}^{(at)} - \lambda_{23}^{(at)}} \left( \frac{e^{-\lambda_{12}^{(at)} t} - e^{-\lambda_{01}^{(at)} t}}{\lambda_{12}^{(at)} - \lambda_{01}^{(at)}} + \frac{e^{-\lambda_{23}^{(at)} t} - e^{-\lambda_{01}^{(at)} t}}{\lambda_{01}^{(at)} - \lambda_{23}^{(at)}} \right), \end{aligned}$$

et de manière évidente :

$$f_{Z_t^{(st)}}(t, 0 | \theta^{(st)}) = e^{-\lambda_{02}^{(st)} t}.$$

Nous pouvons en déduire numériquement l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\theta} = \left( \hat{\theta}^{(at)}, \hat{\theta}^{(st)} \right) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \mathbb{R}_+^5} L(\theta | \text{data}).$$

La théorie du maximum de vraisemblance paramétrique permet de justifier l'approximation de la loi de  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$  par la loi normale centrée et de matrice de variance-covariance  $I^{-1}(\theta)$ , ce qui sera noté :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta)).$$

De plus, la matrice d'information de Fisher  $I(\theta)$  est estimée par  $-H(\hat{\theta})$  l'opposée de la hessienne de la log-vraisemblance évaluée en  $\hat{\theta}$ . On peut alors construire des intervalles de confiance asymptotiques pour chacun des taux (ou des ellipsoïdes de confiance pour plusieurs taux). De manière alternative, on peut construire des intervalles de confiance par bootstrap (Tassi, 2004), surtout en présence d'échantillons de taille petite ou moyenne (bien que l'efficacité soit toute relative en présence d'un petit échantillon).

Pour les applications industrielles, nous pouvons utiliser la  $\delta$ -méthode (Tassi, 2004) pour obtenir des intervalles de confiance pour la fiabilité à un instant donné. Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $R(t; \theta)$  la fiabilité à l'instant  $t$  :

$$\begin{aligned} R(t; \theta) &= \mathbb{P} \left[ \max(Z_t^{(at)}, Z_t^{(st)}) < 3 \right] = \mathbb{P} \left[ Z_t^{(at)} < 3 \right] \mathbb{P} \left[ Z_t^{(st)} < 3 \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \min(X_{03}^{(at)}, X_{03}^{(st)}) > t \right] = \mathbb{P} \left[ X_{03}^{(at)} > t \right] \mathbb{P} \left[ X_{03}^{(st)} > t \right]. \end{aligned}$$

Il est possible de calculer explicitement  $R(t; \theta)$  en partant de la densité de  $X_{03}^{(at)}$ , cf. équation (1), et de celle de  $X_{03}^{(st)}$ , cf. équation (2), si tous les taux sont distincts (pour les autres cas, cf. la thèse d'Aurélien Billon - Billon, 2012). Nous obtenons que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} R(t; \theta) &= \frac{1}{\lambda_{02}^{(st)} - \lambda_{23}^{(st)}} \left[ \lambda_{02}^{(st)} e^{-\lambda_{23}^{(st)} t} - \lambda_{23}^{(st)} e^{-\lambda_{02}^{(st)} t} \right] \\ &\times \frac{1}{\lambda_{01}^{(at)} - \lambda_{12}^{(at)}} \left[ \frac{\lambda_{01}^{(at)} \lambda_{12}^{(at)} e^{-\lambda_{23}^{(at)} t} - \lambda_{01}^{(at)} \lambda_{23}^{(at)} e^{-\lambda_{12}^{(at)} t}}{\lambda_{12}^{(at)} - \lambda_{23}^{(at)}} - \frac{\lambda_{01}^{(at)} \lambda_{12}^{(at)} e^{-\lambda_{23}^{(at)} t} - \lambda_{12}^{(at)} \lambda_{23}^{(at)} e^{-\lambda_{01}^{(at)} t}}{\lambda_{01}^{(at)} - \lambda_{23}^{(at)}} \right]. \end{aligned}$$

Cette probabilité est naturellement estimée par  $R(t; \hat{\theta})$ . En appliquant la  $\delta$ -méthode, nous obtenons que

$$\sqrt{n} \left( R(t; \hat{\theta}) - R(t; \theta) \right) \underset{approx.}{\sim} \mathcal{N} \left( 0, \frac{\partial R}{\partial \theta}(t; \theta) I^{-1}(\theta) \frac{\partial R'}{\partial \theta}(t; \theta) \right)$$

où  $\frac{\partial R}{\partial \theta}(t; \theta)$  est estimée par  $\frac{\partial R}{\partial \theta}(t; \hat{\theta})$  et où  $I(\theta)$  est estimée par  $-H(\hat{\theta})$ .

#### 4.1.2. Cas d'une dépendance des mécanismes de défaillance

En reprenant les mêmes notations, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(\theta, c | \text{data}) = \prod_{i=1}^n f_{(Z_i^{(at)}, Z_i^{(st)})} \left( t_i, \delta_i^{(at)}, \delta_i^{(st)} | \theta, c \right),$$

où, pour tout  $t \geq 0$ ,  $f_{(Z_t^{(at)}, Z_t^{(st)})}$  est la densité jointe du couple  $(Z_t^{(at)}, Z_t^{(st)})$ . Il est possible d'explicitier cette densité jointe :

$$f_{(Z_t^{(at)}, Z_t^{(st)})}(x, y) = \begin{cases} \mathbb{P}[Z_t^{(at)} = x, Z_t^{(st)} = y] & \text{si } (x, y) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 2\} \\ \int_0^t f_{X_{02}^{(at)}}(u) f_{X_{23}^{(at)}}(t-u) \mathbb{P}[Z_t^{(st)} = y | X_{02}^{(at)} = u] du & \text{si } x = 3 \text{ et } y \in \{0, 2\} \\ \mathbb{P}[Z_t^{(at)} = x] f_{X_{03}^{(st)}}(t) & \text{si } x \in \{0, 1\} \text{ et } y = 3 \\ \int_0^t \mathbb{P}[X_{23}^{(at)} > t-u] f_{X_{03}^{(st)} | X_{02}^{(at)}=u}(t) f_{X_{02}^{(at)}}(u) du & \text{si } x = 2 \text{ et } y = 3. \end{cases}$$

En fait, un certain nombre de contributions restent inchangées par rapport au modèle avec indépendance. En effet, tant que l'état 2 n'est pas atteint pour le mécanisme avec tolérance, ce mécanisme n'a aucune influence sur le mécanisme sans tolérance et donc les contributions correspondantes sont les mêmes que précédemment. Comme pour le modèle avec indépendance, nous allons détailler le cas où  $(Z_t^{(at)}, Z_t^{(st)}) = (2, 0)$  pour un instant  $t$  donné (pour les autres cas, voir Billon, 2012) :

$$\begin{aligned} f_{(Z_t^{(at)}, Z_t^{(st)})}(2, 0) &= \int_0^t \int_{t-x_{02}^{(at)}}^\infty \int_t^\infty f_{X_{02}^{(at)}}(x_{02}^{(at)}) f_{X_{23}^{(at)}}(x_{23}^{(at)}) f_{X_{02}^{(st)} | X_{02}^{(at)}}(x_{02}^{(st)} | x_{02}^{(at)}) dx_{02}^{(st)} dx_{23}^{(at)} dx_{02}^{(at)} \\ &= \frac{\lambda_{01}^{(at)} \lambda_{12}^{(at)}}{c \lambda_{02}^{(st)} (\lambda_{01}^{(at)} - \lambda_{12}^{(at)})} \left[ \frac{e^{-\lambda_{23}^{(at)} t} - e^{-(\lambda_{12}^{(at)} + \lambda_{02}^{(st)}) t}}{\lambda_{12}^{(at)} + \lambda_{02}^{(st)} - \lambda_{23}^{(at)}} + \frac{e^{-(\lambda_{01}^{(at)} + \lambda_{02}^{(st)}) t} - e^{-\lambda_{23}^{(at)} t}}{\lambda_{01}^{(at)} + \lambda_{02}^{(st)} - \lambda_{23}^{(at)}} \right]. \end{aligned}$$

Ici également, nous pouvons en déduire numériquement l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$(\hat{\theta}, \hat{c}) = \underset{(\theta, c) \in \mathbb{R}_+^6}{\operatorname{argmax}} L(\theta, c | \text{data}).$$

De même que précédemment, la théorie du maximum de vraisemblance paramétrique permet de justifier l'approximation normale de la loi de cet estimateur. Nous pourrions, en particulier, construire un intervalle de confiance de niveau  $\alpha \in ]0, 1[$  pour le paramètre  $c$  : ainsi si 1 appartient à cet intervalle, nous ne rejetterons pas l'hypothèse d'indépendance des mécanismes de défaillance

au risque de première espèce  $\alpha$ . Une autre approche possible est de considérer un test du rapport de vraisemblance. En effet, sous l'hypothèse nulle ( $c = 1$ ), la statistique  $RV$  définie par

$$RV = -2 \log \max_{\theta \in \mathbb{R}_+^5} L(\theta, 1 | \text{data}) + 2 \log \max_{(\theta, c) \in \mathbb{R}_+^6} L(\theta, c | \text{data})$$

converge en loi vers un  $\chi^2$  à un degré de liberté, quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Nous pouvons alors en déduire un autre test d'indépendance des mécanismes de défaillance.

## 4.2. Illustrations numériques

### 4.2.1. Indépendance des mécanismes de défaillance

D'une manière générale, la maximisation de la fonction de vraisemblance peut s'avérer compliquée. Aussi, nous avons proposé une méthodologie pour obtenir une estimation raisonnable des paramètres. Nous en donnons ci-dessous les grandes étapes (pour plus de détails nous renvoyons le lecteur vers la thèse d'Aurélien Billon - [Billon, 2012](#)) :

- étape 1 : choisir aléatoirement plusieurs points de départ pour l'algorithme itératif d'optimisation (multi-départ), par exemple avec une répartition uniforme sur un domaine assez large.
- étape 2 : estimer les paramètres pour chaque point de départ et calculer les coefficients de variation empiriques pour chacun des paramètres.
- étape 3 : répéter les étapes 1 et 2 pour les paramètres tels que le coefficient de variation empirique est supérieur à un seuil fixé préalablement (0,4 par exemple), les autres estimations étant retenues.

Cette méthode repose sur le postulat qu'une estimation présentant un coefficient de variation empirique faible est stable, donc correcte. Nous préconisons d'arrêter cet algorithme dès que tous les coefficients de variation empiriques seront en-dessous du seuil ou après un nombre prédéterminé d'itérations.

Dans ce qui suit nous avons simulé un jeu de données contenant 1500 individus (et donc autant d'observations, puisque nous supposons que l'état d'un composant n'est connu qu'à un seul instant). Les dates d'inspection ont été simulées en partant de celles observées dans un cas d'étude (données issues de la base de données). Nous avons calculé la moyenne et l'écart-type des dates d'inspection observées. Puis, nous avons simulé les dates d'inspection selon une loi normale tronquée à gauche (par 0) et à droite (par trois fois la période entre deux visites périodiques), en prenant la moyenne et l'écart-type calculés. Le choix de la loi normale tronquée est en accord avec la loi empirique des dates d'inspection. Les observations simulées s'approchent des conditions d'application du modèle. Le tableau 3 présente la vraie valeur des paramètres ainsi que les estimations obtenues et leurs intervalles de confiance (au bout de trois itérations de la méthode présentée ci-dessus).

Une étude numérique plus systématique de la robustesse de la méthode d'estimation a été menée dans [Billon \(2012\)](#).

TABLEAU 3. *Modèle 1- Estimations et intervalles de confiance à 95% (valeurs  $\times 10^{-4}$ )*

Paramètre	Valeur réelle	Estimation	Intervalle de confiance
$\lambda_{01}^{(at)}$	1	0,94	[0,85 ;1,02]
$\lambda_{12}^{(at)}$	5	5,50	[4,67 ;6,34]
$\lambda_{23}^{(at)}$	15	15,80	[12,0 ;19,7]
$\lambda_{02}^{(st)}$	3	2,95	[2,76 ;3,13]
$\lambda_{23}^{(st)}$	1	1,01	[0,87 ;1,15]

#### 4.2.2. Cas d'une dépendance des mécanismes de défaillance

Deux exemples sont étudiés ici sur des données simulées. Dans le premier cas, nous simulons des données avec indépendance des mécanismes et nous souhaitons obtenir un intervalle de confiance pour le paramètre  $c$  qui contienne 1 (ce qui permettrait de supposer l'indépendance des composants). Dans le second cas, nous simulons des données avec dépendance des mécanismes avec  $c = 5$ . Dans tous les cas, nous commençons par appliquer le modèle avec indépendance des composants pour obtenir une première estimation des paramètres. Nous optimisons alors la fonction de vraisemblance sur la base de multi-départs, comme précédemment, choisis aléatoirement autour de la première estimation.

Le tableau 4 présente la vraie valeur des paramètres ainsi que les estimations obtenues et leur intervalle de confiance pour le premier exemple (indépendance des mécanismes de défaillance). L'intervalle de confiance du paramètre  $c$  ne permet pas de rejeter l'hypothèse d'indépendance au risque d'erreur de 5%. Ceci est confirmé par le test du rapport de vraisemblance. En effet, la statistique  $RV$  est égale à 0,64 : la  $p$ -valeur associée est donc égale à 0,42, ce qui est supérieur à 5%.

TABLEAU 4. *Modèle 2, exemple 1- Estimations et intervalles de confiance à 95% (valeurs  $\times 10^{-4}$  sauf pour  $c$ )*

Paramètre	Valeur réelle	Estimation	Intervalle de confiance
$\lambda_{01}^{(at)}$	1	1,01	[0,95 ;1,06]
$\lambda_{12}^{(at)}$	5	4,90	[4,45 ;5,36]
$\lambda_{23}^{(at)}$	15	13,9	[11,9 ;16,0]
$\lambda_{02}^{(st)}$	3	3,01	[2,89 ;3,14]
$\lambda_{23}^{(st)}$	1	0,99	[0,91 ;1,08]
$c$	1	0,78	[0,27 ;1,30]

Le tableau 5 présente la vraie valeur des paramètres ainsi que les estimations obtenues et leur intervalle de confiance pour le second exemple (dépendance des mécanismes de défaillance). L'intervalle de confiance du paramètre  $c$  ne permet pas d'accepter l'hypothèse d'indépendance au risque d'erreur de 5%. Ceci est également confirmé par le test du rapport de vraisemblance. En effet, la statistique  $RV$  est égale à 75,16 : la  $p$ -valeur associée est donc égale à  $4,3 \times 10^{-18}$ , ce qui est bien inférieur à 5%.

TABLEAU 5. *Modèle 2, exemple 2 - Estimations et intervalles de confiance à 95% (valeurs  $\times 10^{-4}$  sauf pour c)*

coefficient	Valeur réelle	Estimation	Intervalle de confiance
$\lambda_{01}^{(at)}$	1	1,01	[0,95 ; 1,06]
$\lambda_{12}^{(at)}$	5	4,91	[4,45 ; 5,36]
$\lambda_{23}^{(at)}$	15	13,8	[11,8 ; 15,8]
$\lambda_{02}^{(st)}$	3	3,01	[2,89 ; 3,14]
$\lambda_{23}^{(st)}$	1	1,00	[0,91 ; 1,08]
c	5	4,61	[3,38 ; 5,84]

## 5. Évaluation d'une politique de maintenance préventive

Nous disposons maintenant d'un modèle pour la dégradation d'un composant soumis à plusieurs mécanismes de défaillance, qui tient compte de l'information disponible dans le REX. Mais les paramètres estimés via ce modèle dépendent des données de dégradation observées sur des composants soumis à une politique de maintenance. Autrement dit, à ce stade, nous disposons d'un modèle pour la dégradation d'un composant pour la politique de maintenance appliquée au matériel en service. Or, pour pouvoir envisager d'autres politiques de maintenance, il est nécessaire de disposer d'un modèle de dégradation "intrinsèque" du composant, c'est-à-dire d'un modèle de dégradation du composant non soumis à une politique de maintenance préventive. C'est l'objectif de cette partie. Nous faisons l'hypothèse que la dégradation intrinsèque peut être modélisée par le même processus bivarié.

Dans cette partie, nous nous limitons aux cas de dégradations indépendantes. En conséquence, pour simplifier la présentation de la méthodologie, nous ne considérons qu'un seul mécanisme de défaillance (« avec tolérance »). Nous commençons par présenter un modèle de dégradation qui prend en compte la politique de maintenance périodique appliquée et qui est implicitement inclus dans les données du REX. La méthodologie que nous proposons sera ensuite détaillée, puis illustrée à travers un exemple numérique.

### 5.1. Modèle de dégradation avec maintenance préventive

Nous supposons désormais que les composants sont inspectés toutes les  $M$  heures de service. La politique de remplacement appliquée reste la même que celle décrite à la sous-section 2.1 : si lors de l'inspection une dégradation hors tolérance est constatée, le composant est remis à neuf. Le modèle suivant intègre donc cet aspect ignoré dans le premier modèle. Le modèle de dégradation devient donc un processus de renouvellement markovien. Nous allons donc pouvoir calculer, de manière récursive, la fiabilité du composant pour ce modèle. Notons  $\tilde{\theta} = (\tilde{\lambda}_{01}, \tilde{\lambda}_{12}, \tilde{\lambda}_{23})'$  l'ensemble des paramètres de ce second modèle.

Soit  $\tilde{P}_t = (\tilde{p}_t(i, j))_{(i, j) \in \{0, 1, 2, 3\}^2}$  la matrice de transition du processus markovien de sauts modélisant l'évolution de la dégradation :

$$\forall (i, j) \in \{0, 1, 2, 3\}^2, \quad \tilde{p}_t(i, j) = \mathbb{P}[X_t = j | X_0 = i].$$

En particulier,  $\tilde{P}_M$  indique les probabilités de transition entre la mise en service du composant et sa première inspection. La matrice  $\tilde{P}_t$  peut être calculée explicitement, soit de manière directe, soit en

résolvant les équations de Chapman-Kolmogorov,  $\tilde{P}'_t = A\tilde{P}_t$  où  $A$  est le générateur infinitésimal du processus markovien (Coccozza-Thivent, 1997). En supposant tous les taux de transition distincts, nous obtenons ainsi les probabilités de transition dont les termes utiles au calcul de la fiabilité du composant sont les suivants : pour tout  $t \leq M$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_t(0,0) &= e^{-\tilde{\lambda}_{01}t} \\ \tilde{p}_t(0,1) &= \frac{\tilde{\lambda}_{01}}{(\tilde{\lambda}_{12} - \tilde{\lambda}_{01})} \left( e^{-\tilde{\lambda}_{01}t} - e^{-\tilde{\lambda}_{12}t} \right) \\ \tilde{p}_t(0,2) &= \frac{\tilde{\lambda}_{01}\tilde{\lambda}_{12}}{(\tilde{\lambda}_{23} - \tilde{\lambda}_{12})} \left( \frac{-e^{-\tilde{\lambda}_{12}t} + e^{-\tilde{\lambda}_{01}t}}{(\tilde{\lambda}_{12} - \tilde{\lambda}_{01})} + \frac{e^{-\tilde{\lambda}_{23}t} - e^{-\tilde{\lambda}_{01}t}}{(\tilde{\lambda}_{23} - \tilde{\lambda}_{01})} \right) \\ \tilde{p}_t(0,3) &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}_{01}t} - \frac{\tilde{\lambda}_{01}}{(\tilde{\lambda}_{12} - \tilde{\lambda}_{01})} \left( e^{-\tilde{\lambda}_{01}t} - e^{-\tilde{\lambda}_{12}t} \right) \\ &\quad - \frac{\tilde{\lambda}_{01}\tilde{\lambda}_{12}}{(\tilde{\lambda}_{23} - \tilde{\lambda}_{12})} \left( \frac{-e^{-\tilde{\lambda}_{12}t} + e^{-\tilde{\lambda}_{01}t}}{(\tilde{\lambda}_{12} - \tilde{\lambda}_{01})} + \frac{e^{-\tilde{\lambda}_{23}t} - e^{-\tilde{\lambda}_{01}t}}{(\tilde{\lambda}_{23} - \tilde{\lambda}_{01})} \right) \\ \tilde{p}_t(1,1) &= e^{-\tilde{\lambda}_{12}t} \\ \tilde{p}_t(1,2) &= \frac{\tilde{\lambda}_{12}}{(\tilde{\lambda}_{23} - \tilde{\lambda}_{12})} \left( e^{-\tilde{\lambda}_{12}t} - e^{-\tilde{\lambda}_{23}t} \right) \\ \tilde{p}_t(1,3) &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}_{12}t} - \frac{\tilde{\lambda}_{12}}{(\tilde{\lambda}_{23} - \tilde{\lambda}_{12})} \left( e^{-\tilde{\lambda}_{12}t} - e^{-\tilde{\lambda}_{23}t} \right) \\ \tilde{p}_t(2,2) &= e^{-\tilde{\lambda}_{23}t} \\ \tilde{p}_t(2,3) &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}_{23}t}. \end{aligned}$$

Notons  $R_0(t; \tilde{\theta})$  (resp.  $R_1(t; \tilde{\theta})$ ) la fiabilité du composant à l'instant  $t \in [0; M[$  (i.e. avant la première inspection) sachant qu'il était initialement dans l'état 0 (resp. dans l'état 1) :

$$R_0(t; \tilde{\theta}) = \mathbb{P} \left[ Z_t^{(at)} \neq 3 \mid Z_0^{(at)} = 0 \right] \quad \text{et} \quad R_1(t; \tilde{\theta}) = \mathbb{P} \left[ Z_t^{(at)} \neq 3 \mid Z_0^{(at)} = 1 \right].$$

Soit  $R_{main}(t; \tilde{\theta}, M)$  la fiabilité du composant à l'instant  $t$  pour lequel des visites périodiques ont lieu toutes les  $M$  heures. Du fait de ces inspections périodiques où une opération de maintenance préventive peut être menée (selon l'état du composant lors de l'inspection), cette fonction doit être calculée par morceaux :

$$\forall t \in [mM; (m+1)M[, \quad R_{main}(t; \tilde{\theta}, M) = R_{main}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M),$$

où  $R_{main}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M)$  correspond à la fiabilité du composant à l'instant  $t$  entre la  $m$ -ième et la  $(m+1)$ -ième inspections. Nous rappelons qu'initialement le composant est neuf. Pour  $m = 0$ , nous avons

$$\forall t \in [0; M[, \quad R_{main}^{(0)}(t; \tilde{\theta}, M) = R_0(t; \tilde{\theta}).$$



Pour  $m = 1$ , en conditionnant par rapport à l'état du composant à l'instant  $M$  et en utilisant la propriété de Markov, nous obtenons que

$$\forall t \in [M; 2M[, \quad R_{main}^{(1)}(t; \tilde{\theta}, M) = (\tilde{p}_M(0, 0) + \tilde{p}_M(0, 2))R_0(t - M; \tilde{\theta}) + \tilde{p}_M(0, 1)R_1(t - M; \tilde{\theta}),$$

De même, pour  $m = 2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \forall t \in [2M; 3M[, \quad R_{main}^{(2)}(t; \tilde{\theta}, M) &= (\tilde{p}_M(0, 0) + \tilde{p}_M(0, 2)) \\ &\times [(\tilde{p}_M(0, 0) + \tilde{p}_M(0, 2))R_0(t - 2M, \tilde{\theta}) + \tilde{p}_M(0, 1)R_1(t - 2M, \tilde{\theta})] \\ &+ \tilde{p}_M(0, 1) [\tilde{p}_M(1, 1)R_1(t - 2M, \tilde{\theta}) + \tilde{p}_M(1, 2)R_0(t - 2M, \tilde{\theta})]. \end{aligned}$$

Il est possible de déterminer les fonctions  $R_{main}^{(m)}(\cdot; \tilde{\theta}, M)$  par récurrence. Pour  $(i, j) \neq (0, 0)$  (resp.  $(i, j) = (0, 0)$ ), on note par  $r_{ij}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M)$  la probabilité que le composant soit dans l'état  $j$  (0 ou 2) au temps  $mM$  et non défaillant au temps  $t \in [mM; (m+1)M[$  sachant qu'il est dans l'état  $i$  au temps  $(m-1)M$  :

$$\forall t \in [mM; (m+1)M[, \quad r_{ij}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M) = \mathbb{P}[Z_t^{(at)} < 3; Z_{mM}^{(at)} = j | Z_{(m-1)M}^{(at)} = i]$$

si  $(i, j) \in \{(0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$  et

$$\forall t \in [mM; (m+1)M[, \quad r_{00}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M) = \mathbb{P}[Z_t^{(at)} < 3; Z_{mM}^{(at)} \in \{0, 2\} | Z_{(m-1)M}^{(at)} = 0].$$

Par récurrence, nous obtenons l'expression suivante que, pour tout  $t \in [mM; (m+1)M[$ ,

$$R_{main}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M) = r_{00}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M) + r_{01}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M),$$

où, pour  $t \in [M; 2M[$ ,

$$\begin{aligned} r_{00}^{(1)}(t; \tilde{\theta}, M) &= (\tilde{p}_M(0, 0) + \tilde{p}_M(0, 2))R_0(t - M; \tilde{\theta}), \\ r_{01}^{(1)}(t; \tilde{\theta}, M) &= \tilde{p}_M(0, 1)R_1(t - M; \tilde{\theta}), \\ r_{11}^{(1)}(t; \tilde{\theta}, M) &= \tilde{p}_M(1, 1)R_1(t - M; \tilde{\theta}), \\ r_{12}^{(1)}(t; \tilde{\theta}, M) &= \tilde{p}_M(1, 2)R_0(t - M; \tilde{\theta}), \end{aligned}$$

et, pour  $m \geq 2$  et  $t \in [mM; (m+1)M[$ ,

$$\begin{aligned} r_{00}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M) &= (\tilde{p}_M(0, 0) + \tilde{p}_M(0, 2))(r_{00}^{(m-1)}(t; \tilde{\theta}, M) + r_{01}^{(m-1)}(t; \tilde{\theta}, M)), \\ r_{01}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M) &= \tilde{p}_M(0, 1)(r_{11}^{(m-1)}(t; \tilde{\theta}, M) + r_{12}^{(m-1)}(t; \tilde{\theta}, M)), \\ r_{11}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M) &= \tilde{p}_M(1, 1)(r_{11}^{(m-1)}(t; \tilde{\theta}, M) + r_{12}^{(m-1)}(t; \tilde{\theta}, M)), \\ r_{12}^{(m)}(t; \tilde{\theta}, M) &= \tilde{p}_M(1, 2)(r_{00}^{(m-1)}(t; \tilde{\theta}, M) + r_{01}^{(m-1)}(t; \tilde{\theta}, M)). \end{aligned}$$

## 5.2. Méthodologie d'évaluation de la fiabilité intrinsèque

Nous décrivons ici la méthodologie proposée pour estimer la fiabilité intrinsèque du composant et étudier l'impact d'une autre périodicité des maintenances préventives. Cette méthodologie est schématisée sur la figure 5.2 pour le cas d'un composant soumis à deux mécanismes de défaillance.

**Étape 1** Nous commençons par estimer la fiabilité du composant à partir des données du REX à l'aide du modèle de base. Nous estimons ainsi la fiabilité du composant correspondant à la maintenance préventive appliquée en service (nous rappelons que les effets de la maintenance préventive sont implicitement inclus dans les données). Notons  $R_{rex}(t; \hat{\theta})$  l'estimation de la fiabilité à l'instant  $t$ .

**Étape 2** Nous estimons ensuite les paramètres du modèle qui prend explicitement en compte la maintenance en minimisant la distance (par exemple, celle de Cramér-von Mises) entre les fiabilités fournies par les deux modèles (pour la périodicité de maintenance appliquée en service). Nous allons donc déterminer le paramètre  $\tilde{\theta}$  tel que les fiabilités  $R_{rex}(\cdot; \hat{\theta})$  et  $R_{main}(\cdot; \tilde{\theta}, M)$  soient les plus proches, où  $M$  représente la périodicité des inspections appliquée en service. Nous proposons d'utiliser la distance de Cramér-von Mises (notée  $d_{CvM}$ ) définie par :

$$d_{CvM}(\tilde{\theta}, M) = \int_0^{+\infty} \left( R_{main}(t; \tilde{\theta}, M) - R_{rex}(t; \hat{\theta}) \right)^2 f_{rex}(t; \hat{\theta}) dt$$

où  $f_{rex}$  (resp.  $F_{rex}$ ) représente l'estimation de la densité (resp. fonction de répartition) du temps de fonctionnement du composant estimé à partir des données de retour d'expérience. Nous obtenons donc :

$$\hat{\tilde{\theta}} = \operatorname{argmin}_{\tilde{\theta} \in \mathbb{R}_+^3} d_{CvM}(\tilde{\theta}, M),$$

où, en pratique, la distance  $d_{CvM}(\tilde{\theta}, M)$  est calculée par la méthode de Monte Carlo.

Ce choix de méthode d'estimation des paramètres du modèle de dégradation avec maintenance résulte de la nature du REX qui ne permet pas un ajustement du modèle incluant la maintenance à partir des données. En effet, les données disponibles sont obtenues suite à une dépose d'un moteur en centre de réparation. Les raisons de cette dépose peuvent être diverses, par exemple, suite à l'allumage d'un voyant d'alerte, à un événement en service ou encore lors d'une inspection périodique. Cependant, lors d'une dépose pour une raison quelconque, une maintenance est éventuellement effectuée sur le composant incriminé, mais un autre composant peut également être inspecté de part sa proximité ou parce qu'il semble endommagé. Il n'est donc pas toujours possible d'identifier la nature de la maintenance effectuée sur un composant : la dépose est-elle due à une visite programmée ou non programmée ? Nous ne pouvons donc pas estimer directement le paramètre  $\tilde{\theta}$  sur les données issues du REX puisque nous ne savons pas quelles sont les données correspondant à un retour dû à une visite préventive.

Le contexte est le même que précédemment, à savoir que les composants sont supposés n'être vus qu'une seule fois (lors d'une inspection ou d'une défaillance). L'état du composant n'est connu qu'à cet instant. Prenant en compte uniquement la périodicité des visites, les paramètres obtenus reflètent la dégradation en l'absence de maintenance conditionnelle périodique (l'effet des éventuelles maintenances dues aux inspections non programmées n'est toutefois pas soustrait).

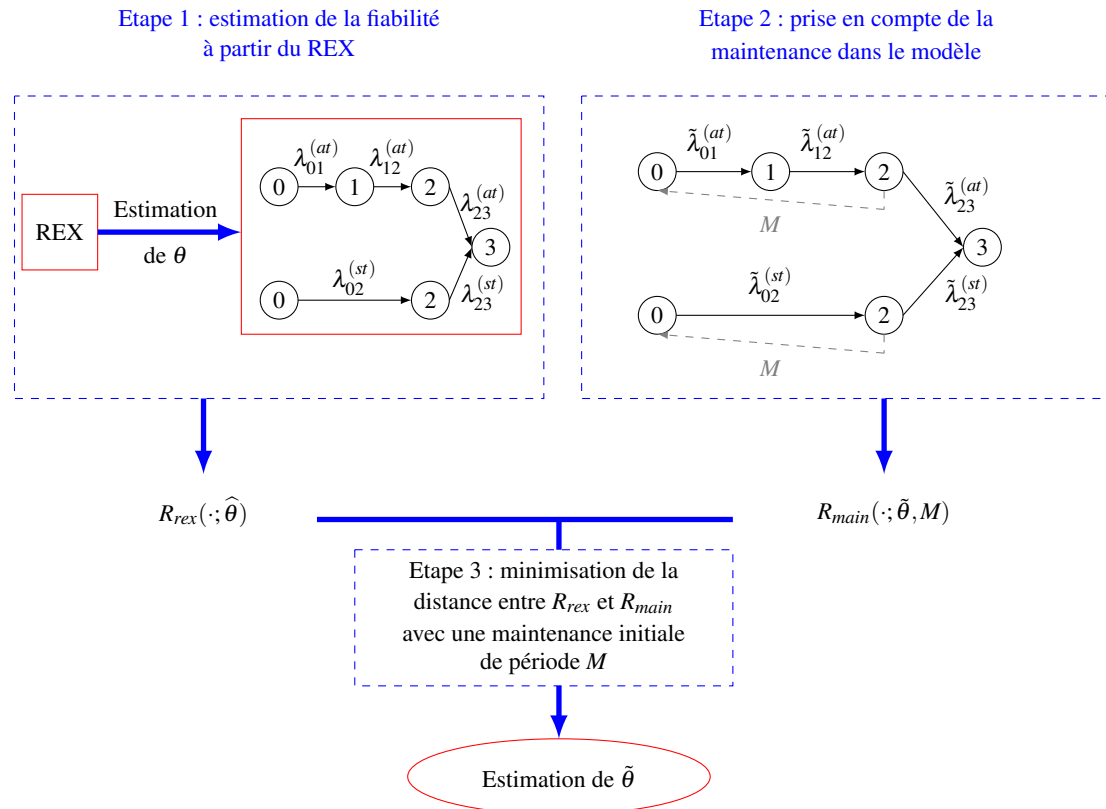


FIGURE 6. Résumé de la méthodologie proposée

### 5.3. Validation sur un exemple

Les résultats de cette section sont basés sur des données fictives sur un composant dont la périodicité des visites est de  $M = 1000$  heures. Pour estimer la dégradation du composant, nous disposons des données de centre de réparation (données de retour d'expérience) identiques à celles du tableau 6.

TABLEAU 6. Exemple de données simulées

	Heures de vol	état
Individu 1	521	0
Individu 2	3254	3
Individu 3	1625	1
...	...	...
Individu $n$	2548	2

Nous commençons par estimer les paramètres de la dégradation du composant à partir des données disponibles à l'aide du modèle "avec tolérance" (cas de l'usure). Nous estimons ensuite les paramètres de la dégradation du composant en l'absence de maintenance préventive en minimisant la distance entre  $R_{rex}(\cdot; \hat{\theta})$  estimée précédemment et la fiabilité  $R_{main}(\cdot; \tilde{\theta}, 1000)$ . La figure 5.3 montre les différentes fiabilités estimées. La courbe noire correspond à la fiabilité

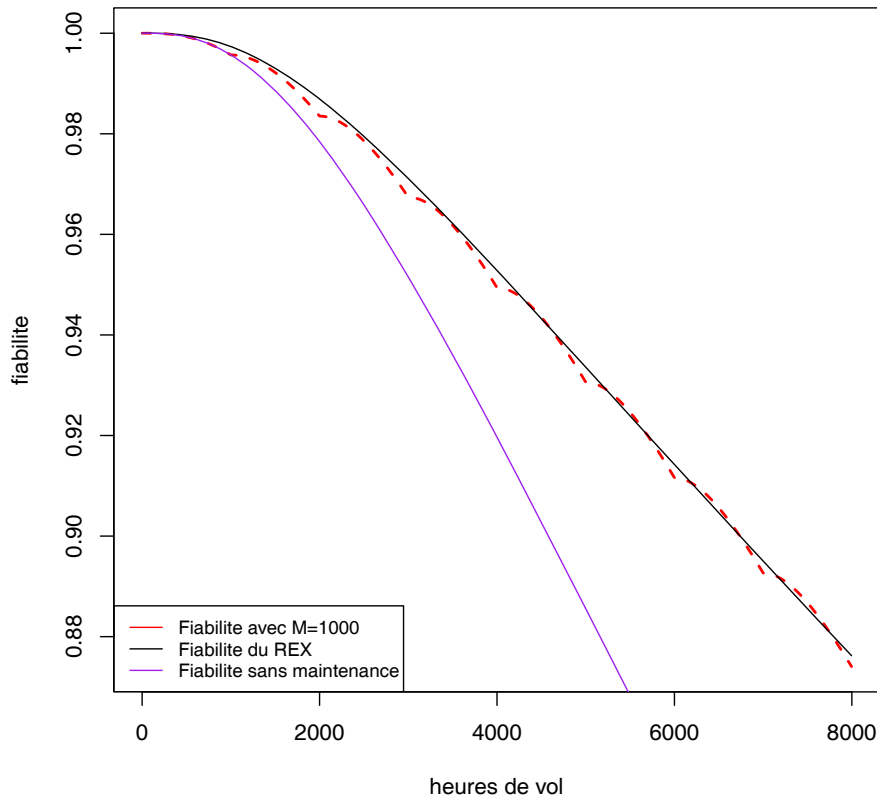


FIGURE 7. Fiabilités correspondant au REX (noire), avec maintenance (rouge) et sans maintenance (violette)

$R_{rex}(\cdot; \hat{\theta})$  estimée à partir du REX. La courbe rouge en pointillé est la fiabilité  $R_{main}(\cdot, \hat{\theta}, 1000)$ . Nous avons minimisé la distance entre ces deux fiabilités pour obtenir la fiabilité du composant comme si aucune maintenance préventive n'avait jamais eu lieu (courbe violette).

Nous pouvons alors étudier l'impact d'un changement de la périodicité des visites sur la fiabilité du composant. En considérant les taux de transition estimés (i.e.  $\hat{\theta}$ ), nous calculons alors la fiabilité  $R_{main}(\cdot, \hat{\theta}, M)$  pour différentes périodicités  $M$  des visites. Sur la figure 5.3, nous pouvons constater l'impact sur la fiabilité d'une périodicité fixée à 500, 1000, 2000, 3000 et 4000 heures.

## 6. Conclusion

Dans cet article, nous avons décrit un modèle de dégradation d'un composant d'un turbomoteur basé sur les données disponibles dans le REX. L'objectif est d'utiliser au mieux l'information disponible pour chaque dégradation en ne se limitant pas qu'à la défaillance du composant. Nous avons ainsi exploité au mieux le REX.

Les travaux présentés dans cet article nous ont permis d'estimer la fiabilité intrinsèque (vis-à-vis

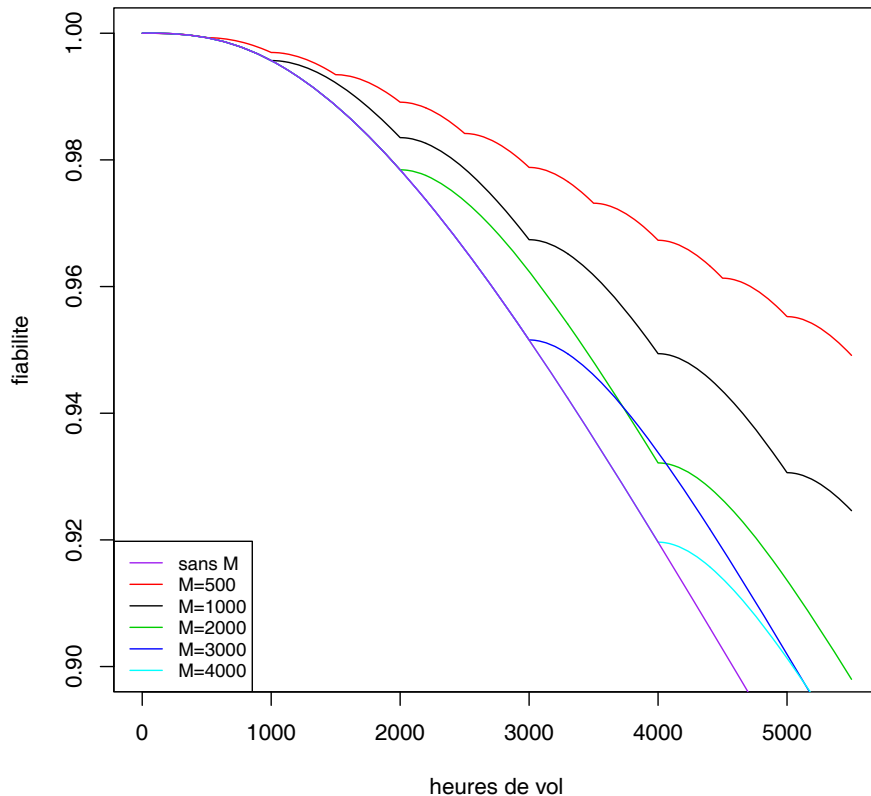


FIGURE 8. *Impact de la périodicité des inspections sur la fiabilité*

de la maintenance préventive) d'un composant. Cela nous a conduit, entre autre, à évaluer la fiabilité du composant en l'absence de maintenance préventive, puis à tester différentes périodicités des maintenances préventives afin de juger de leur efficacité au regard de certains critères de sûreté et/ou de coûts.

Sur la base de simulations (pour plus de détails, voir [Billon, 2012](#)), des recommandations ont été faites sur l'utilisation possible du modèle avec indépendance des mécanismes de défaillance. Il en ressort que, pour pouvoir appliquer le modèle, il faut disposer d'un jeu de données contenant au moins trois cents individus et que chaque état soit observé au moins une fois.

Cependant le REX ne satisfait pas toujours ce critère. Parfois, la cause de la panne n'a pas pu être déterminée. Autrement dit, il arrive que, pour certains composants, nous ne puissions pas identifier la cause de défaillance. On parle alors de données avec cause manquante. Enfin, il existe des composants hautement fiables pour lesquels aucune défaillance n'est observée : on parle de cas "zéro défaillance". Pour ces situations, des solutions ont été proposées dans la thèse d'Aurélien Billon ([Billon, 2012](#)).

## Références

- Alioum, A. and Commenges, D. (2001). MKVPCI : A computer program for Markov models with piecewise constant intensities and covariates. *Computer methods and programs in biomedicine*, 64 :109–19.
- Andersen, P. K. and Keiding, N. (2002). Multi-state models for even history analysis. *Statistical methods in medical research*, 11 :91–115.
- Billon, A. (2012). Modélisation de la fiabilité de composants d'un moteur aéronautique basée sur les données des dégradations en fonction de la maintenance programmée. Thèse de doctorat de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- Coccozza-Thivent, C. (1997). *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*. Collection "Mathématiques & Applications", Springer.
- Commenges, D. (1999). Multi-state models in epidemiology. *Lifetime Data Analysis*, 5 :315–327.
- Commenges, D. (2002). Inference for multi-state models from interval-censored data. *Statistical methods in medical research*, 1 :167–182.
- Cox, D. R. (1972). Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B.*, 34(2) :187–220.
- Guo, F., Rakha, H., and Park, S. (2010). Multistate model for travel time reliability. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 2128 :46–54.
- Hougaard, P. (1999). Multi-state models : A review. *Lifetime Data Analysis*, 5 :239–264.
- Joly, P., Commenges, D., Helmer, C., and Letenneur, L. (2002). A penalized likelihood approach for an illness-death model with interval-censored data : application to age-specific incidence of dementia. *Biostatistics*, 3 :433–443.
- Kalbeisch, J. and Prentice, K. (2002). *The statistical analysis of failure time data*. Wiley Series in Probability and Statistics.
- Kallen, M. (2009). A comparison of statistical models for visual inspection data. In *H. Furuta, D.M. Frangopol and M. Shinozuka (Eds)*. Safety, Reliability and Risk of Structures, Infrastructures and Engineering Systems, Proceedings of the Tenth International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'2009), pages 3235–3242. Taylor & Francis, London.
- Kallen, M. and van Noordwijk, J. (2006). Statistical inference for Markov deterioration models of bridge conditions in the Netherlands. In *D.M. Frangopol P.J.S. Cruz and L.C. Neves (Eds)*, Proceedings of the Third International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management (IABMAS), pages 16–19. Taylor & Francis Group.
- Lawless, J. (2003). *Statistical models and methods for lifetime data*. Wiley Series in Probability and Statistics.
- Lisnianski, A. and Frenkel, I. (2012). *Recent advances in system reliability : signatures, multi-state systems and statistical inference*. Springer.
- Lisnianski, A. and Levitin, G. (2003). *Multi-state system reliability. Assessment, optimization, applications*. World Scientific.
- Manual (2010). *Document interne, ref : X292879601IR*. Turbomeca Training.
- Natvig, B. and Mørch, H. (2003). An application of multistate reliability theory to an offshore gas pipeline network. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 10 :361–381.
- Tassi, P. (2004). *Méthodes statistiques*. Technip.
- Yang, Y. (2011). Contributions to the analysis of multistate and degradation data. PhD thesis, University of Michigan.